高等学校试用教材

# 非线性泛函分析及其应用

赵义纯 编著



高等教育出版社

高等学校试用教材

# 非线性泛函分析及其应用

赵义纯　编著

高等教育出版社

## 内 容 提 要

本书经高等工业学校应用数学专业教材委员会1986年5月杭州会议审定为教材．内容包括Banach空间中的微分学和抽象函数的积分、Banach压缩原理的重要推广——Caristi不动点定理和非扩展算子、拓扑度理论和方法、变分方法、单调算子理论以及集值映射的不动点理论．书中讲述了上述理论在非线性常微分方程、积分方程、拟线性椭圆型偏微分方程变动边值问题和凸规划上的应用．

本书可供高等理工科院校应用数学专业、数学专业和计算数学专业的学生作为教材，也可供数学研究生、大学教师和科技人员参考．

高等学校试用教材

非线性泛函分析及其应用

赵义纯 编著

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河印刷厂印装

＊

开本850×1168 1/32 印张9.875 字数230 000

1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷

印数0 001—2 000

ISBN7-04-002015-7/O·728

定价 2.65 元

# 序

近二十年来非线性泛函分析获得蓬勃发展. 现在有越来越多的理工科院校为应用数学专业本科生和研究生开出这门课程. 本书是在原编油印讲义《非线性泛函分析及其应用》的基础上修改而成的,经高等工业学校应用数学专业教材委员会1986年杭州会议审定为教材. 近几年国内外已经出版了几本非线性泛函分析专著,其中尤以自1985年以来相继出版的E. Zeidler著《Nonlinear Functional Analysis and Its Applications》四卷英译本的内容最为浩繁,可谓囊括这一领域各个方面的成果. 本书与这些专著有很大不同. 实际上,它是在作者八年来为数学系研究生和本科生讲授同名课程所用的讲稿基础上逐步形成的. 为适合本科生的需要,去掉了过细和过于专门的材料,突出了这门课程的基本理论. 同时尽可能多地选了一些应用在非线性常微分方程、非线性积分方程、非线性偏微分方程、数值分析和最优化问题上的实例.

第一章介绍Banach空间中的微分学、抽象函数的Riemann积分和隐函数定理. 其中微分理论,作为本门课程的最基础的知识写得较充实. 第二章先介绍Caristi不动点定理,它是Banach压缩映射原理的一个最有价值的推广,在变分学、最优化、控制论、数学规划和微分方程等领域有着广泛应用. 然后介绍非扩展算子不动点理论,它是处理非线性发展方程的有力工具. 第三章详细介绍了拓扑度理论,及一些著名的不动点定理,并通过各种应用使学生掌握度理论方法. 第四章先讲述梯度映射和它的势泛函表达式,这部分是无穷维空间的场论. 然后讲述泛函的极值以及弱

下半连续性在保证泛函达到极小值的重要作用. 最后介绍变分方法在非线性积分方程的应用. 第五章先从在微分方程、积分方程、凸规划、数值分析和非光滑分析等领域很有用的次微分理论讲起，然后介绍一类重要的非紧映射——单调映射的基本理论，其中包括正规对偶映射和强制极大单调映射必满射等基本结果. 第六章简略介绍一下集值映射的不动点理论和 Von Neumann 极小极大定理.

本书不涉及线性拓扑空间知识. 书中已详述了所用到的拓扑知识. 读者只需具有线性泛函分析入门知识便可学习本书. 书中少量标有*号的章节以及小字排印的内容可不讲授. 为便于学习，第二章 §7 和 §8 就线性赋范空间的情形讲述了凸集分离定理和弱拓扑等概念和结果. 除第一章是共同需要的基础知识外，其余各章很少相互涉及，授课教师可根据学时多少和要求，自行取舍章节，灵活使用. 60 学时可讲完本书大部分内容.

应用数学教材编委会将这本书稿定为教材之列，在国内是一个新的尝试. 哈尔滨工业大学吴从炘教授在百忙中仔细审阅了书稿，提出许多宝贵意见，增强了本书的适用性. 胡志国、杨光红、梁岳和宋叔尼同志也对本书提出不少改进意见并抄写书稿，在此一并向他们表示衷心感谢. 由于作者学术水平和教学经验的限制，书中错误和不当之处在所难免，恳切希望专家、授课教师和读者给予指正

编　者

# 目　录

**第一章　Banach 空间中的微分学** …… 1

§1　非线性算子的有界性和连续性 …… 1

§2　微分与导算子 …… 11

2·1　方向微分 …… 11

2·2　$G$-微分 …… 15

2·3　$F$-微分 …… 17

2·4　性质与实例 …… 20

§3　Riemann 积分 …… 25

§4　高阶微分 …… 30

4·1　$n$ 线性算子 …… 30

4·2　高阶微分 …… 32

§5　反函数定理和隐函数定理 …… 35

§6　Newton 方法 …… 42

习题 …… 47

**第二章　压缩原理与非扩展算子** …… 49

§1　压缩算子的一些推广 …… 49

1·1　线性算子和压缩算子 …… 50

1·2　Caristi 不动点定理 …… 51

§2　压缩原理在积分方程和微分方程上的应用 …… 53

§3　一致凸赋范空间 …… 55

§4　非扩展算子 …… 59

§5　非线性发展方程周期解的存在性 …… 63

§6　非扩展算子的迭代法 …… 65

*§7 凸集分离定理……73
*§8 弱拓扑和弱紧集……78
8·1 线性赋范空间上的弱拓扑……78
8·2 弱紧集……84
习题……86
第三章 拓扑度理论……88
§1 有限维空间映射的拓扑度……89
1·1 $C^1$ 映射的拓扑度……90
1·2 预备知识……98
1·3 临界值的情形……105
1·4 连续映射的拓扑度……111
§2 有限维空间映射拓扑度的性质……114
2·1 $f$ 与 $p$ 的改变……114
2·2 区域 $\Omega$ 的改变……118
2·3 乘积定理与简化定理……121
§3 Brouwer 定理与 Borsuk 定理……126
3·1 Brouwer 不动点定理……126
3·2 奇映射……128
§4 Brouwer 度的应用……136
4·1 开映射……137
4·2 非线性本征值问题……139
4·3 非自治方程的周期解……141
§5 Leray-Schauder 度……143
5·1 引言……143
5·2 Leray-Schauder 度的定义……145
5·3 Leray-Schauder 度的性质……150
§6 Schauder 不动点定理和 Leray-Schauder 原理……159
6·1 Schauder 不动点定理……159
6·2 Schauder 不动点定理的一些推广……162

*6·3 Dugundji 扩张定理……166
§7 在非线性常微分方程上的应用……169
§8 在非线性积分方程上的应用……173
习题……176
第四章 变分方法……180
§1 梯度映射……180
§2 弱下半连续泛函……191
§3 无条件极值……195
3·1 无条件极值的必要条件……195
3·2 无条件极值的存在性……199
§4 单调梯度映射……203
§5 Hammerstein 方程解的存在性……208
§6 极小化序列……216
习题……220
第五章 单调映射……222
§1 单调映射……222
1·1 次微分……222
1·2 单调映射……225
1·3 局部有界性与半连续性……226
§2 正规对偶映射……229
2·1 局部一致凸空间……229
2·2 正规对偶映射……231
§3 极大单调映射……235
3·1 极大单调映射……235
3·2 伪单调映射……238
§4 单调型映射的满射性……242
4·1 强制映射的满射性……242
4·2 极大性判别法……253

4·3 非强制映射的满射性……256
§5 凸泛函次微分的进一步性质……258
5·1 凸分析……258
5·2 次微分的进一步性质……264
§6 在 Hammerstein 积分方程上的应用……268
§7 在拟线性椭圆型偏微分方程边值问题上的应用……272
§8 在凸规划上的应用……279
习题……282
第六章 集值映射的不动点……285
§1 集值映射不动点的存在性……285
§2 极大极小定理……289
*§3 单位分解……293
参考文献……296
索引……299
符号……304

# 第一章　Banach 空间中的微分学

早在泛函分析诞生之前，在变分学中就已经考虑了非线性泛函和它的变分。非线性泛函分析是无穷维拓扑空间(或无穷维流形)上的非线性分析，它所研究的对象是作用在无穷维空间中的非线性算子．因此，非线性泛函分析中的一些概念、方法和结果常常受到有限维空间的分析学和线性泛函分析的启迪．像古典分析那样，算子的有界性、连续性、微分和积分等分析概念是首先要碰到的，本章在 Banach 空间中讨论这些概念．

## §1　非线性算子的有界性和连续性

设 $X, Y$ 均为距离空间，$T$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的算子．我们用 $\mathscr{D}(T)$ 表示 $T$ 的定义域，记作 $T: \mathscr{D}(T)\subset X\to Y$．记号 $T: \Omega\subset X\to Y$ 表示 $\Omega=\mathscr{D}(T)$．特别地，$T: X\to Y$ 系指 $\mathscr{D}(T)=X$

**定义1·1**　设 $X, Y$ 是距离空间，称算子 $T: \mathscr{D}(T)\subset X\to Y$ 是有界的，是指 $T$ 映 $\mathscr{D}(T)$ 内任一有界集为 $Y$ 中的有界集．

**定义1·2**　设 $X$、$Y$、$T$ 同定义1·1，$x_0\in\mathscr{D}(T)$．称 $T$ 在 $x_0$ 处连续，是指对于任意点列 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，当 $x_n\to x_0$ 时，有 $Tx_n\to Tx_0$．

若 $T$ 在 $\mathscr{D}(T)$ 的每一点皆连续，则称 $T$ 是连续算子．

不难验证，如此定义的连续性概念与用邻域来定义是等价的．

由定义可以看出，连续的概念依赖于极限的概念．我们知道，在无穷维赋范空间中，有多种极限的概念，从而可以定义多种连续的概念．极限概念有强有弱，决定了连续性概念有强有弱．在研

究具体问题时，许多算子往往不具有较强的连续性，因而有必要研究各种较弱的连续性. 在本节最后，我们将介绍几种其它的连续性概念.

**定义1·3** 设 $X$、$Y$、$T$ 同定义 1·1，称 $T$ 在 $\mathscr{D}(T)$ 上是一致连续的，是指对于任意指定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x'$、$x''\in\mathscr{D}(T)$ 且 $\rho(x',x'')<\delta$ 时，有 $\rho_1(Tx',Tx'')<\varepsilon$，其中 $\rho$、$\rho_1$ 分别表示 $X$,$Y$ 的距离.

下面来考虑算子的连续性与有界性的关系.

**例1** 设 $X$ 是 $n$ 维欧氏空间 $E^n$，$Y=E^1$. $f$: $\Omega\subset X\to Y$ 连续. 众所周知，若 $\Omega$ 是有界闭集，则 $f$ 在 $\Omega$ 上有界. 自然要问，当 $X$ 为无穷维赋范空间时，上述结论是否仍然成立呢？下面的例子说明结论不一定成立.

**例2** 取 $X=l^2$，$Y=E^1$，$f$: $X\to Y$，其中 $x=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in X$，

$$f(x)=\sum_{|\eta_m|\geqslant 1}(|\eta_m|-1)m.$$

实际上对于固定的 $x$，$f(x)$ 仅对有限项求和，下面证明 $f$ 在 $X$ 上连续.

设 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset X$，$x_n=(\eta_1^{(n)},\eta_2^{(n)},\cdots)$，$x_n\to x_0\,(n\to\infty)$，则 $f(x_n)=\sum\limits_{|\eta_m^{(n)}|\geqslant 1}(|\eta_m^{(n)}|-1)m$，$f(x_0)=\sum\limits_{|\eta_m^{(0)}|\geqslant 1}(|\eta_m^{(0)}|-1)m$.

因为 $x_n\to x_0$，而 $l^2$ 中按范数收敛蕴涵一致依坐标收敛，又因 $f(x_0)$ 仅对有限项求和，因而 $f(x_n)\to f(x_0)\,(n\to\infty)$，即 $f$ 在 $X$ 上连续. 然而，$f$ 不是有界算子. 事实上，任取 $\varepsilon_0>0$，令 $\eta_m^{(n)}=(1+\varepsilon_0)\cdot\delta_{mn}$，$x_n=(\eta_1^{(n)},\eta_2^{(n)},\cdots)$，其中

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1, & \text{当 } m=n\\ 0, & \text{当 } m\neq n\end{cases}$$

那么 $\{x_n\}\subset\bar{B}(\theta,\ 1+\varepsilon_0)$，其中 $\bar{B}(\theta,1+\varepsilon_0)=\{x\in X\mid\|x\|\leqslant 1+$

$\varepsilon_0\}$，而 $f(x_n)=n\varepsilon_0\to\infty\ (n\to\infty)$，故 $f$ 无界.

由于 $\bar{B}(\theta,1+\varepsilon_0)$ 是有界闭集，可见有界闭集上的连续算子不一定有界.

本书用 $B(x_0,r)$ 和 $\bar{B}(x_0,r)$ 分别表示以 $x_0$ 为心，$r$ 为半径的开球和闭球.

**命题1·1** 设 $X$、$Y$ 皆为线性赋范空间，$T:\bar{B}(x_0,r)\subset X\to Y$ 一致连续，则 $T$ 为有界算子.

**证明** 由假设知，存在 $\delta>0$，当 $x',x''\in\bar{B}(x_0,r)$ 且 $\|x'-x''\|<\delta$ 时，有 $\|Tx'-Tx''\|<1$. 本书用 $\mathscr{N}$ 表示全体自然数的集合. 取 $n_0\in\mathscr{N}$，使得 $\frac{r}{n_0}<\delta$. 设 $x\in\bar{B}(x_0,r)$，令 $x_i=x_0+\frac{i}{n_0}(x-x_0)\ (i=0,1,\cdots,n_0)$，则根据

$$\|x_{i+1}-x_i\|=\frac{1}{n_0}\|x-x_0\|\leqslant\frac{r}{n_0}<\delta$$

有 $\|Tx_{i+1}-Tx_i\|<1\quad(i=0,1,\cdots,n_0-1)$

故有

$$\begin{aligned}\|Tx\|&\leqslant\|Tx-Tx_0\|+\|Tx_0\|\\&\leqslant\sum_{i=0}^{n_0-1}\|Tx_{i+1}-Tx_i\|+\|Tx_0\|\\&\leqslant n_0+\|Tx_0\|\end{aligned}$$

即 $T$ 为有界算子.

证毕

**值得注意的是**，在命题 1·1中若将闭球 $\bar{B}(x_0,r)$ 换成有界闭集，则结论不真. 但从命题 1·1 的证明中易看出对有界凸集结论仍然成立.

由命题 1·1和例 2 我们可以看出，无穷维空间中有界闭集上的连续算子不一定是一致连续的.

**例 3** Caratheodory 映射.

设 $\Omega\subset E^n$ 是 Lebesgue 可测集，$f(s,u)$ 是定义在 $s\in\Omega$, $|u|<\infty$ 上的函数，称 $f(s,u)$ 满足 Caratheodory 条件，是指

$c_1$) 对几乎所有的 $s\in\Omega$, $f(s,u)$ 对 $u$ 连续.

$c_2$) 对任意固定的 $u$, $f(s,u)$ 对 $s$ 是可测的.

适合 Caratheodory 条件的函数，称为 Caratheodory 函数.

设 $x(s)$ 是一实函数 $(s\in\Omega)$. 定义 $(Fx)(s)=f(s,x(s))$. 这个算子 $F$ 为一非线性算子，它将 $\Omega$ 上的实函数映成 $\Omega$ 上的实函数. 称此算子为 Caratheodory 映射或 Nemyskii 算子.

我们来证明，$F$ 映 $\Omega$ 上 $(L)$ 可测函数为 $\Omega$ 上 $(L)$ 可测函数. 实际上，不失一般性，可设对所有 $s\in\Omega$, $f(s,u)$ 对 $u$ 连续. 设 $x(s)$ 是可测函数. 取简单函数列 $\{x_n(s)\}$ 满足 $x(s)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(s)$. 于是，对每一 $s\in\Omega$, $f(s,x(s))=\lim\limits_{n\to\infty}f(s,x_n(s))$. 下面来证明每个 $f(s,x_n(s))$ 都是可测函数，从而也就证明了 $f(s,x(s))$ 是可测的. 设 $x_n(s)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\chi_{\Omega_j}(s)$，其中 $c_j$ 是常数，$\chi_{\Omega_j}$ 是 $\Omega_j$ 的特征函数，$\Omega_j$ 两两不交，$\bigcup\limits_{j=1}^{n}\Omega_j=\Omega$. 由此得 $f(s,x_n(s))=\sum\limits_{j=1}^{n}f(s,c_j)\chi_{\Omega_j}(s)$. 因为每一个被加项都是可测的，所以 $f(s,x_n(s))$ 可测.

现在我们来考虑 Caratheodory 映射的有界性与连续性. 我们关心的是它在空间 $L^p(\Omega)$ $(p\geq 1)$ 上的性质.

**引理 1·1** (Nemyskii V. V., 1934) 设 $m\Omega<\infty$，则 Caratheodory 映射 $F$ 映依测度收敛列 $\{x_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ 为依测度收敛列 $\{f(s,x_n(s))\}_{n=1}^{\infty}$.

**证明** 设 $x_n(s)$ 依测度收敛于 $x_0(s)$. 我们欲证：对于任意指定的 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$，存在 $N$，当 $n\geq N$ 时，有

$$m(\Omega_n)=m\{s\in\Omega\,\big|\,|f(s,x_n(s))-f(s,x_0(s))|<\varepsilon\}$$

$$>m(\Omega)-\delta$$

对于上述的 $e>0$，令

$$G_k=\{s\in\Omega\,|\,\text{对于任意的 } u,\ |x_0(s)-u|<\frac{1}{k}\Rightarrow$$

$$|f(s,x_0(s))-f(s,u)|<\varepsilon\}$$

其中"⇒"表示蕴涵关系．则 $G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_k\subset G_{k+1}\subset\cdots$．记 $E=\Omega\setminus\bigcup_k G_k$．若 $s\in E$，则 $s\overline{\in}G_k\ (k=1,2,\cdots)$，即存在 $u_k$，虽然 $|x_0(s)-u_k|<\frac{1}{k}$，但 $|f(s,x_0(s))-f(s,u_k)|\geqslant\varepsilon\ (k=1,2,\cdots)$．这正表明 $f(s,\cdot)$ 在 $u=x_0(s)$ 处不连续．据 $c_1)$ $m(E)=0$．从而 $m(\Omega)=m\left(\bigcup_k G_k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}m(G_k)$．由此得出对于给定的 $\delta>0$，存在 $K_0\in\mathcal{N}$，有

$$m(G_{K_0})>m(\Omega)-\frac{\delta}{2} \tag{1·1}$$

令 $F_n=\left\{s\in\Omega\,\middle|\,|x_n(s)-x_0(s)|<\frac{1}{K_0}\right\}$．因为 $x_n(s)$ 依测度收敛于 $x_0(s)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}m(F_n)=m(\Omega)$．故存在 $N$，当 $n\geqslant N$ 时，

$$m(F_n)>m(\Omega)-\frac{\delta}{2} \tag{1·2}$$

根据 $F_n$ 与 $G_{k_0}$ 的定义，$F_n\cap G_{k_0}\subset\Omega_n$．所以 $m(\Omega_n)\geqslant m(F_n\cap G_{k_0})$，综合(1·1)、(1·2)式知，$n\geqslant N$ 时，$m(\Omega_n)>m(\Omega)-\delta$．

证毕

**定理 1·1** (Vainberg M. M., 1951) 若 $m(\Omega)<\infty$，$p_1,p_2\geqslant1$ 且 Caratheodory 函数满足

$$|f(s,u)|\leqslant a(s)+b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}\quad(s\in\Omega,\ |u|<\infty) \tag{1·3}$$

其中 $a(s)\in L^{p_2}(\Omega)$，$b=\text{const.}>0$，则 $F: L^{p_1}(\Omega)\to L^{p_2}(\Omega)$ 连续．

**证明** 设 $u=x(s)\in L^{p_1}(\Omega)$，则 $a(s)+b|x(s)|^{\frac{p_1}{p_2}}\in L^{p_2}(\Omega)$.
据(1·3)，$|f(s,x(s))|\leqslant a(s)+b|x(s)|^{\frac{p_1}{p_2}}$，故 $f(s,x(s))\in L^{p_2}(\Omega)$，即 $F: L^{p_1}(\Omega)\to L^{p_2}(\Omega)$.

设 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset L^{p_1}(\Omega)$，$x_n\to x_0(n\to\infty)$，则 $x_n(s)$ 依测度收敛于 $x_0(s)$. 依引理1·1，$f(s,x_n(s))$ 依测度收敛于 $f(s,x_0(s))$. 此时，$|f(s,x_n(s))-f(s,x_0(s))|^{p_2}$ 依测度收敛于0.

若能证明 $|f(s,x_n(s))-f(s,x_0(s))|^{p_2}$ 的积分具有等度绝对连续性，则据Vitali定理(见参考文献[4])，有 $\int_\Omega|f(s,x_n(s))-f(s,x_0(s))|^{p_2}ds\to 0$，即 $F$ 在 $x_0$ 处连续. 首先注意到

$$
\begin{aligned}
&|f(s,x_n(s))-f(s,x_0(s))|^{p_2}\\
&\leqslant 2^{p_2}(|f(s,x_n(s))|^{p_2}+|f(s,x_0(s))|^{p_2})\\
&\leqslant 4^{p_2}(2|a(s)|^{p_2}+b^{p_2}|x_n(s)|^{p_1}+b^{p_2}|x_0(s)|^{p_1})
\end{aligned}
$$

$$|x_n(s)|^{p_1}\leqslant 2^{p_1}|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}+2^{p_1}|x_0(s)|^{p_1}$$

由以上两式知，只需证明 $|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}$ 的积分具有等度绝对连续性即可.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由 $\int_\Omega|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}ds\to 0$ 知，存在 $N$，当 $n>N$ 时，$\int_\Omega|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}ds<\varepsilon$. 此时，对于任一可测集 $A\subset\Omega$，$\int_A|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}ds<\varepsilon(n>N)$. 由 $|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}$ 的积分绝对连续性，对于上述的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于任意可测集 $A\subset\Omega$，当 $m(A)<\delta$ 时，有 $\int_A|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}ds<\varepsilon$ $(n=1,\cdots,N)$. 故当 $m(A)<\delta$ 时，有 $\int_A|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}ds<\varepsilon(n=1,2,\cdots)$，即 $|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}$ 的积分具有等度绝对连续性.

**证毕**

定理中的条件(1·3)表示$f(s,u)$关于$u$的增长条件. 如果$p_1=p_2=2$,称为不超过线性增长条件. 它不仅保证了$F$把$L^{p_1}(\Omega)$映到$L^{p_2}(\Omega)$,而且也保证了$F$的连续性.

**定理1·2** (Krasnoselskii M.A. 1951) 若$F$: $L^{p_1}(\Omega)\to L^{p_2}(\Omega)$连续,则$F$有界.

**证明** 不妨设$F(\theta)=\theta$, 否则, 考虑$f_1(s,u)=f(s,u)-f(s,0)$, 此时$f_1(s,u)$亦是Caratheodory映射且$F_1$: $L^{p_1}(\Omega)\to L^{p_2}(\Omega)$及$F_1(\theta)=\theta$.

因为$F$在原点连续,所以$F$在原点附近有界,即存在$r>0$,当$\|x(s)\|_{p_1}<r$时,$\|f(s,x(s))\|_{p_2}\leqslant 1$.

设$x\in L^{p_1}(\Omega)$,则存在$n_0(x)$: $n_0 r^{p_1}\leqslant\|x(s)\|_{p_1}^{p_1}<(n_0+1)r^{p_1}$,即

$$n_0 r^{p_1}\leqslant\int_\Omega |x(s)|^{p_1}ds<(n_0+1)r^{p_1} \tag{1·4}$$

由Lebesgue测度的连续性,可分割$\Omega$: $\Omega=\bigcup_{k=1}^{n_0+1}\Omega_k$, 使得$\Omega_k$两两不交且$\int_{\Omega_k}|x(s)|^{p_1}ds<r^{p_1}\ (k=1,2,\cdots,n_0+1)$. 作

$$x_k(s)=\begin{cases}x(s), & s\in\Omega_k\\ 0, & s\in\Omega\setminus\Omega_k\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots,n_0+1)$$

有$\|x_k(s)\|_{p_1}<r$, 从而$\int_\Omega|f(s,x_k(s))|^{p_2}ds=\int_{\Omega_k}|f(s,x(s))|^{p_2}ds<1$. 故

$$\int_\Omega|f(s,x(s))|^{p_2}ds\leqslant\sum_{k=1}^{n_0+1}\int_{\Omega_k}|f(s,x(s))|^{p_2}ds<n_0+1 \tag{1·5}$$

综合(1·4),(1·5)两式,有

$$\|Fx\|_{p_2}<(n_0+1)^{\frac{1}{p_2}}\leqslant(r^{-p_1}\|x(s)\|_{p_1}^{p_1}+1)^{\frac{1}{p_2}}$$

即 $F: L^{p_1}\to L^{p_2}$有界.

证毕

关于 Caratheodory 映射还有更好的结果：若 $F$：$L^{p_1}\to L^{p_2}$ $(p_1, p_2\geqslant 1)$，则有 $|f(s,u)|\leqslant a(s)+b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}$，其中 $a(s)$、$b$ 同定理 1·1. 另外，还可以去掉定理 1·1 关于 $m\Omega<\infty$ 的限制. 这里我们就不去证明这些结论了(详见参考文献[31]中第一章). 这样，根据定理1·1与定理1·2，我们就可以得出这样的结论：若 $F$：$L^{p_1}(\Omega)\to L^{p_2}(\Omega)$，则 $F$ 连续且有界.

前面例 2 说明作用在无穷维空间有界闭集上的非线性算子，它的连续性并不保证其有界性，其根源在于空间是"无穷维"的. 但是，对作用在无穷维空间的一些具体算子，连续性通常是苛刻的要求，它们常常只具有某些很弱的连续性. 因此有必要给出一些较弱的连续性概念. 今后我们用记号"$\rightharpoonup$"和"$\overset{*}{\rightharpoonup}$"分别表示点列的弱收敛和弱*收敛.

**定义 1·4** 设 $X$、$Y$ 皆为线性赋范空间，$T$：$\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$，$x_0\in\mathscr{D}(T)$.

(i) 称 $T$ 在 $x_0$ 处次连续，是指对于任意点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{D}(T)$，当 $x_n\to x_0$ 时，有 $Tx_n\rightharpoonup Tx_0$；

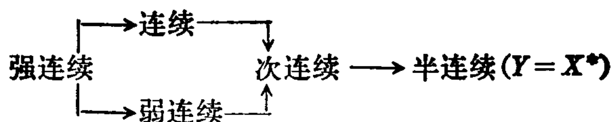
(ii) 称 $T$ 在 $x_0$ 处弱连续，是指对于任意点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{D}(T)$，当 $x_n\rightharpoonup x_0$ 时，有 $Tx_n\rightharpoonup Tx_0$；

(iii) 称 $T$ 在 $x_0$ 处强连续，是指对于任意点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{D}(T)$，当 $x_n\rightharpoonup x_0$ 时，有 $Tx_n\to Tx_0$；

(iv) 假设 $Y$ 是 $X$ 的共轭空间 $X^*$. 称 $T$ 在 $x_0$ 处半连续，是指对于任意的 $h\in X$，当 $t_n>0\,(n\in\mathscr{N})$，$t_n\to 0$ 且 $x_0+t_nh\in\mathscr{D}(T)$ 时，就有 $T(x_0+t_nh)\overset{*}{\rightharpoonup} Tx_0$.

如果算子 $T$ 在一集合的每一点都具有某种连续性，则说 $T$ 在该集合上具有这种连续性.

各种连续性的关系如下：




第五章命题1·3将证明，对自反Banach空间的单调算子来说，在定义域的内点处次连续与半连续等价．本书常见的情形是从$X$到$X^*$的算子．我们始终用记号$(Tx,h)$来表示连续线性泛函$Tx(\in X^*)$在$h(\in X)$的取值．如果$\Omega$是凸集，则容易验证，算子$T$在$\Omega$上是半连续的，当且仅当对任何$x,h\in\Omega$及任何$e\in X$，$(T(x_0+th),e)$是$[0,1]$上$t$的连续函数．

**定义1·5** 设$X$是线性赋范空间，$\Omega\subset X$．称$\Omega$是序列式弱闭集，是指对于任意点列$\{x_n\}\subset\Omega$，当$x_n\rightharpoonup x_0$时，有$x_0\in\Omega$．

另有一种弱闭集合的概念系指在弱拓扑下是闭集．我们将在第二章§8讨论弱拓扑下的闭集及与序列式弱闭集的关系．

为了后面的需要，现在介绍自反Banach空间有界集的一条重要性质(引理1·3)，为此先证

**引理1·2**(Pettis) 设$X$是自反Banach空间，$X_0$是$X$的闭线性子空间，则$X_0$是自反Banach空间．

**证明** 考虑$X^*$与$X_0^*$．作映射$T: X^*\to X_0^*$，$Tf=f|_{X_0}$，$(f\in X^*)$．不难验证，$T$是有界线性算子．

下面证明$X_0$是自反Banach空间，即要证明：对于任一$y\in X_0^{**}$，存在$x_0\in X_0$，使得对任一$\varphi\in X_0^*$，有

$$y(\varphi)=\varphi(x_0)$$

由于$T^*y\in X^{**}$，$X$是自反Banach空间，因此，存在$x_0\in X$，$x_0^{**}=T^*y$．设$\varphi\in X_0^*$，据Hahn-Banach定理，存在$f\in X^*$，$\varphi=Tf$．从而$y(\varphi)=y(Tf)=(T^*y)(f)=f(x_0)$．故以下只需证$x_0\in X_0$，这样就有$y(\varphi)=\varphi(x_0)$．若$x_0\in X\setminus X_0$，则依Hahn-Banach定理，存在

$f_0\in X^*$，使得 $f_0(x)=0(x\in X_0)$，$f_0(x_0)=\|x_0\|>0$，那么$0=Tf_0=\varphi_0\in X^*$．但 $f_0(x_0)=y(\varphi_0)=0$ 与 $f_0(x_0)>0$ 相矛盾．

证毕

**引理 1·3**(Eberlein-Shmulyan) 设$X$是自反 Banach 空间，则$X$中任何有界集是弱列紧集．

**证明** 设$\{x_n\}\subset X$，$\|x_n\|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$．记 $X_0$是由$\{x_n\}$生成的闭线性子空间，据引理 1·2，$X_0$是自反Banach 空间．由 $X_0$可分，知 $X_0^{**}$可分，从而 $X_0^*$可分．

以下视$\{x_n\}$是 $X_0$中的点列．对于任意 $f\in X_0^*$，$x_n^{**}(f)=f(x_n)$且$\|x_n^{**}\|=\|x_n\|\leqslant M$．即$\{x_n^{**}\}$是 $X_0^{**}$中的有界点列．依 Alaoglu 定理(即可分空间的共轭空间的任何有界集是弱*列紧的)，从$\{x_n^{**}\}$中可抽出子列$\{x_{n_k}^{**}\}$，$\{x_{n_k}^{**}\}$弱*收敛于 $x_0^{**}\in X_0^{**}$，即对任一$f\in X_0^*$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{**}(f)=x_0^{**}(f)$．因$X_0$自反，故存在 $x_0\in X_0$，使得$x_0^{**}$是 $x_0$在 $X^{**}$中的自然嵌入，于是

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)\quad(f\in X_0^*)$$

下面证明$\{x_{n_k}\}$在$X$中弱收敛于 $x_0$．对于任意 $f\in X^*$，$f(x_n)=f|_{X_0}(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$，$f|_{X_0}\in X_0^*$．故有$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}f|_{X_0}(x_{n_k})=f|_{X_0}(x_0)=f(x_0)$，即$\{x_{n_k}\}$在$X$中弱收敛于 $x_0$．

证毕

引理 1·3 是一个极重要的结果，其逆定理亦成立，即若$X$的任意有界集是弱列紧的，则$X$是自反 Banach 空间（见参考文献[28]）．这样，我们得到了自反 Banach 空间的一个特征：单位球是弱列紧的．

**命题 1·2** 设$X$是自反 Banach 空间，$Y$ 是线性赋范空间，$T$：$\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$ 弱连续且$\mathscr{D}(T)$是序列式弱闭的，则$T$是有界算子．

**证明** 若$T$无界，则存在有界点列$\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，$\|Tx_n\|\to\infty$．

由引理 1·3，有 $x_0\in X$ 及 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$. 由对 $\mathscr{D}(T)$ 的所设知 $x_0\in\mathscr{D}(T)$. 依 $T$ 的弱连续性，$Tx_{n_k}\rightharpoonup Tx_0$. 因此，$\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是有界点列，此与 $\|Tx_{n_k}\|\to\infty$ 相矛盾.

证毕

## §2 微分与导算子

本节讲述线性赋范空间的微分学，主要内容是 $G$-微分与 $G$-导算子和 $F$-微分与 $F$-导算子以及广义中值定理.

### 2·1 方向微分

设 $X$ 是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$，$x_0$ 是 $\Omega$ 的内点，那么对于任意的 $h\in X$，只要 $t$ 足够小，便有 $x_0+th$ 属于 $x_0$ 的某一邻域 $\subset\Omega$，即对于任意的 $h\in X$，存在 $\alpha_h>0$，当 $|t|<\alpha_h$ 时，$x_0+th\in\Omega$. 由此我们可以引入下列概念.

**定义 2·1** 设 $X$ 是实线性空间，$\Omega\subset X$，称 $x_0\in\Omega$ 是 $\Omega$ 的 1-内点，是指对任何 $h\in X$，存在 $\alpha_h>0$，使当 $|t|<\alpha_h$ 时，$x_0+th\in\Omega$. 若 $\Omega$ 的每一点皆为 1-内点，则称 $\Omega$ 是 1-开集.

从以上定义直接看出，赋范空间中的开集必为 1-开集.

**定义 2·2** 设 $X$ 为实线性空间，$Y$ 为实线性赋范空间，$T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$，且 $x_0$ 是 $\mathscr{D}(T)$ 的 1-内点，$h\in X$. 如果

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(x_0+th)-Tx_0}{t} \tag{2·1}$$

存在，则称 $T$ 在 $x_0$ 处沿方向 $h$ 可微分. 此时，称其极限值是 $T$ 在 $x_0$ 处沿方向 $h$ 的微分，也叫做 $T$ 在 $x_0$ 处对应于 $h$ 的 $G$-变分，记作 $\delta T(x_0)h$. 若对任何 $h\in X$，$\delta T(x_0)h$ 都存在，则称 $T$ 在 $x_0$ 处有 $G$-变分. 如果在 $\Omega(\subset\mathscr{D}(T))$ 上每一点处有 $G$-变分，则称 $T$ 在 $\Omega$ 上有 $G$-变分.

我们还可以引入更弱的微分概念. 如果把定义 2·2 中的(2·1)式换成

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(x_0+th)-Tx_0}{t}=\delta_+T(x_0)h$$

$$\left(\lim_{t\to 0^-}\frac{T(x_0+th)-Tx_0}{t}=\delta_-T(x_0)h\right)$$

存在,则称 $\delta_+T(x_0)h(\delta_-T(x_0)h)$ 为 $T$ 在 $x_0$ 处沿方向 $h$ 的右(左)微分. 容易看出, $\delta T(x_0)h$ 存在的充要条件是 $\delta_+T(x_0)h$ 和 $\delta_-T(x_0)h$ 均存在且 $\delta_+T(x_0)h=\delta_-T(x_0)h$, 而且此时它们等于 $\delta T(x_0)h$. 本节只讨论 $\delta T(x_0)h$ 的性质. 只是在第五章才需用到 $\delta_+T(x_0)h$.

从定义 2·2 直接看出, $\delta T(x_0)h\in Y$. $G$-变分是数学分析中方向导数概念的推广.

显然,(2·1)式等价于下列的:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\|T(x_0+th)-Tx_0-t\delta T(x_0)h\|=0 \qquad (2\cdot 2)$$

**命题 2·1**

(i) 若对 $h\neq 0$, $\delta T(x_0)h$ 存在,则对任意实数 $r\neq 0$, $\delta T(x_0)(rh)$ 存在且

$$\delta T(x_0)(rh)=r\delta T(x_0)h \qquad \text{(齐次性)}$$

(ii) 若 $\delta T(x_0)h$ 存在,则 $\lim\limits_{t\to 0}(T(x_0+th)-Tx_0)=0$

(iii) 若 $\delta T(x_0)h$ 存在,则对任何 $k\in Y^*$($Y$ 的共轭空间),函数 $\varphi(t)=(k,T(x_0+th))$ 在 $t_0$ 处可微且

$$\left.\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|_{t=0}=(k,\delta T(x_0)h)$$

**证明**

(i) 在(2·2)中令 $t=t'r$,则有

$$\lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'r}\|T(x_0+t'rh)-Tx_0-t'r\delta T(x_0)h\|=0$$

因此

$$\lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'}\|T(x_0+t'rh)-Tx_0-t'r\delta T(x_0)h\|=0$$

即 $\delta T(x_0)(rh)$ 存在且 $\delta T(x_0)(rh)=r\delta T(x_0)h$.

(ii) 由(2·2)式及估计式$\|T(x_0+th)-T(x_0)\|\leqslant\|T(x_0+th)-Tx_0-t\delta T(x_0)h\|+|t|\|\delta T(x_0)h\|$，有 $\lim\limits_{t\to 0}(T(x_0+th)-Tx_0)=0$

(iii) 由 $\delta T(x_0)h$ 之定义及 $k$ 是 $Y$ 上的连续线性泛函，有

$$\begin{aligned}(k,\delta T(x_0)h)&=\left(k,\lim_{t\to 0}\frac{T(x_0+th)-Tx_0}{t}\right)\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(k,T(x_0+th))-(k,Tx_0)]\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(t)-\varphi(0)]=\frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0}\end{aligned}$$

证毕

如果对空间$X$中的很多$h$，$\delta T(x_0)h$皆存在，则由它确定了一个从$X$到$Y$的算子$\delta T(x_0)$. 值得注意的是$\delta T(x_0)$的定义域不一定是全空间$X$. 命题2·1之(i)说明了这个算子关于$h$是齐次的. 命题2·1之(ii)说明，$\delta T(x_0)h$的存在蕴涵$T$在$x_0$处沿方向$h$连续. 当$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to X^*$在$x_0$处有$G$-变分时，即当$\mathscr{D}(\delta T(x_0))=X$时，$T$在$x_0$处半连续.

**例1** 设$X=E^2, Y=E^1, x=(x_1,x_2)\in X$. 定义

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x_2^3}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}$$

取$h\in X$, $h=(h_1,h_2)\neq\theta$, $\theta=(0,0)$. 则易知$\delta f(\theta)h=f(h)$，故$\delta f(\theta)$不是$h$的线性函数.

**定理2·1** 设$X,Y$皆是实线性赋范空间，$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$,

$x_0$是$\mathscr{D}(T)$的内点，则$T$在$x_0$处有$G$-变分的充要条件是存在$V(x_0): X\to Y$及$Q(x_0): \mathscr{D}(Q(x_0))\subset X\to Y$，满足

$$T(x_0+h)-Tx_0=V(x_0)h+Q(x_0)h, \text{当 } x_0+h\in\mathscr{D}(T) \tag{2·3}$$

其中(i) $V(x_0)(rh)=rV(x_0)h, (r\neq 0, \theta\neq h\in X)$；

(ii) $\frac{1}{t}\|Q(x_0)(th)\|\to 0, (t\to 0, h\in X)$，即$\|Q(x_0)(th)\|=o(t)$

**证明** 必要性：令$V(x_0)=\delta T(x_0)$，$Q(x_0)h=T(x_0+h)-Tx_0-\delta T(x_0)h$，则有(2·3)式及(i)、(ii)成立.

**充分性**：依(i)、(ii)及(2·3)式，有

$$\frac{1}{t}\|T(x_0+th)-Tx_0-tV(x_0)h\|$$

$$=\frac{1}{t}\|Q(x_0)(th)\|\to 0 \quad (t\to 0, h\in X)$$

根据(2·2)式知，$T$在$x_0$处有$G$-变分.

证毕

**$G$-变分的一条重要性质是，对泛函来说仍有 Lagrange 公式成立，称为广义 Lagrange 公式.**

**定理 2·2** 设$X$是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$是凸开集，泛函$\varphi: \Omega\to E^1$在$\Omega$上有$G$-变分，则对于任意的$x\in\Omega$及$h\in X$，当$x+h\in\Omega$时，存在$\tau=\tau(x,h)\in(0,1)$，满足

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\delta\varphi(x+\tau h)h$$

**证明** 设$x\in\Omega, h\in X$及$x+h\in\Omega$，由$\Omega$的凸性知，当$0\leqslant t\leqslant 1$时，$x+th=(1-t)x+t(x+h)\in\Omega$.

令$f(t)=\varphi(x+th)\,(0\leqslant t\leqslant 1)$，显然，$f(t)$在$[0,1]$上连续. 由于$\varphi$在$x+th\,(0\leqslant t\leqslant 1)$有$G$-变分，有

$$\left|\frac{f(t+\lambda)-f(t)}{\lambda}-\delta\varphi(x+th)h\right|\to 0 \qquad (\lambda\to 0)$$

因此，$f(t)$在$(0,1)$可微且$f'(t)=\delta\varphi(x+th)h$. 故有

$$f(1)-f(0)=f'(\tau)=\delta\varphi(x+\tau h)h \quad \tau\in(0,1)$$

即

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\delta\varphi(x+\tau h)h$$

证毕

定理2·2中要求$\varphi$是泛函. 对于一般的非线性算子，广义Lagrange公式不再成立，但有较弱的结果.

**定理2·3**(Vainberg M. M., 1952) 设$X, Y$皆为实线性赋范空间，$\Omega\subset X$是凸开集，$T: \Omega\to Y$在$\Omega$上有$G$-变分，则对于任意的$x\in\Omega, h\in X$及$e\in Y^*$，当$x+h\in\Omega$时，存在$\tau=\tau(x,h,e)\in(0,1)$，使

$$(e, T(x+h)-Tx)=(e, \delta T(x+\tau h)h)$$

其中记号$(e,\cdot)$表示泛函$e$在"$\cdot$"处的取值.

**证明** 作$\varphi(x)=(e,Tx)$，则$\varphi: \Omega\to E^1$. 因$T$在$\Omega$上有$G$-变分，所以$\varphi$在$\Omega$上有$G$-变分且

$$\delta\varphi(x)h=(e, \delta T(x)h)$$

根据定理2·2，$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\delta\varphi(x+\tau h)h$，即

$$(e, T(x+h)-Tx)=(e, \delta T(x+\tau h)h)$$

证毕

## 2·2 G-微分

设$X$、$Y$均为实线性赋范空间，今后用$\mathscr{B}(X,Y)$表示$X$到$Y$的有界线性算子空间.

**定义2·3** 设$X$、$Y$、$T$、$x_0$同定理2·1，称$T$在$x_0$处为$G$-可微分的，是指$T$在$x_0$处有$G$-变分且$\delta T(x_0)\in\mathscr{B}(X,Y)$. 此时，记$dT(x_0)=\delta T(x_0)$，称它是$T$在$x_0$处的$G$-导算子，亦可记作$T'(x_0)$，而$dT(x_0)h$称为$G$-微分. 若对于任意的$x\in\Omega$，$T$在$x$处为$G$-可微分的，则称$T$在$\Omega$上$G$-可微分.

按定义直接看出，$G$-导算子$dT(x_0)$是唯一的. 注意

$$dT: \mathscr{D}(dT) \subset \mathscr{D}(T) \to \mathscr{B}(X,Y)$$

即当 $x \in \mathscr{D}(dT) \subset X$ 时，$dT(x) \in \mathscr{B}(X,Y)$. 称 $dT$ 为 $T$ 的 $G$-导映射. 特别地，对于泛函 $\varphi: \mathscr{D}(\varphi) \subset X \to E^1$，称 $d\varphi(x_0)$ 为 $\varphi$ 在 $x_0$ 处的梯度，记作 $\text{grad}\varphi(x_0)$. 梯度和梯度映射是第四章变分方法所讨论的主要对象. $G$-微分是 Gâteaux 微分的缩写.

**定理 2·4** 设 $X,Y$ 为实线性赋范空间，$T: \mathscr{D}(T) \subset X \to Y$，$x_0$ 是 $\mathscr{D}(T)$ 的内点. 则 $T$ 在 $x_0$ 处 $G$-可微的充要条件是存在 $a(x_0) \in \mathscr{B}(X,Y)$ 及 $q(x_0): \mathscr{D}(q(x_0)) \subset X \to Y$，满足

$$T(x_0+h) - Tx_0 = a(x_0)h + q(x_0)h \quad (x_0+h \in \mathscr{D}(T))$$

其中 $\frac{1}{t}\|q(x_0)(th)\| \to 0 \ (t \to 0)$，即 $\|q(x_0)(th)\| = o(t)$.

**证明** 类似定理 2·1 的证明.

**定理 2·5** 设 $X,Y$ 皆为实线性赋范空间，$\Omega \subset X$ 是凸开集，$T: \Omega \to Y$ 在 $\Omega$ 上 $G$-可微分. 则对于任意的 $x \in \Omega$ 及 $h \in X$，当 $x+h \in \Omega$ 时，存在 $\tau = \tau(x,h) \in (0,1)$，满足

$$\|T(x+h) - Tx\| \leqslant \|dT(x+\tau h)\| \|h\|$$

**证明** 若 $T(x+h) - Tx = \theta$，则结论成立. 设 $T(x+h) - Tx \neq \theta$，据 Hahn-Banach 定理，存在 $e \in Y^*$，$\|e\| = 1$ 且有

$$\|T(x+h) - Tx\| = (e, T(x+h) - Tx)$$

依定理 2·3，存在 $\tau = \tau(x,h) \in (0,1)$，有

$$\begin{aligned} (e, T(x+h) - Tx) &= (e, dT(x+\tau h)h) \\ &\leqslant \|e\| \|dT(x+\tau h)\| \|h\| \\ &= \|dT(x+\tau h)\| \|h\|. \end{aligned}$$

即

$$\|T(x+h) - Tx\| \leqslant \|dT(x+\tau h)\| \|h\|$$

证毕

算子 $T$ 的 $G$-可微性，并不能保证 $T$ 具有较好的分析属性. 例

如，它仅能保证$T$是半连续的，而不能保证$T$是连续的. 另外，设$T_1: X\to Y, T_2: Y\to Z$，可以证明链锁规则对于$T_2\circ T_1$不一定成立. 所以人们往往称$G$-微分是弱微分. 因此，我们有必要引进较强的微分概念.

### 2·3 $F$-微分

**定义 2·4** 设$X$、$Y$皆为实线性赋范空间，$T: \mathscr{D}(T)\subset X\to Y$，$x_0$是$\mathscr{D}(T)$的内点. 称$T$在$x_0$处是 Fréchet 可微分的，是指存在$DT(x_0)\in\mathscr{B}(X,Y)$，满足

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{1}{\|h\|}\|T(x_0+h)-Tx_0-DT(x_0)h\|=0$$

又称$DT(x_0)$为$T$在$x_0$处的 Fréchet 导算子(简称$F$-导算子)，而称$DT(x_0)h$是$T$在$x_0$处的$F$-微分. 若$\Omega\subset X$并且$T$在$\Omega$上每一点是$F$-可微分的，则称$T$在$\Omega$上$F$-可微分.

按定义直接看出，$F$-导算子是唯一的. $F$-微分是数学分析中全微分概念的推广. 注意

$$DT: \mathscr{D}(DT)\subset\mathscr{D}(T)\to\mathscr{B}(X,Y)$$
$$x_0\longmapsto DT(x_0)$$

称$DT$是算子$T$的$F$-导映射. 有时也把$DT(x_0)$记作$T'(x_0)$，但要从上下文才能判定它是否为$F$-导算子. 如果导映射$DT$在$x_0$处连续，则称映射$T$在$x_0$处连续可微.

**定理 2·6** 设$X$、$Y$、$T$、$x_0$同定义 2·4，则$T$在$x_0$处为$F$-可微分的充要条件是存在$A(x_0)\in\mathscr{B}(X,Y)$及$R(x_0)$: $\mathscr{D}(R(x_0))\to Y$，满足

$$T(x_0+h)-Tx_0=A(x_0)h+R(x_0)h \quad (\text{当 } x_0+h\in\mathscr{D}(T))$$

其中$\frac{1}{\|h\|}\|R(x_0)h\|\to 0(\|h\|\to 0)$，即$\|R(x_0)h\|=o(\|h\|)$.

**证明** 取$A(x_0)=DT(x_0)$, $R(x_0)h=T(x_0+h)-Tx_0-DT(x_0)h$即可.

证毕

**命题2·2** 设$X,Y$为实线性赋范空间，$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$在$x_0$处为$F$-可微分的，则$T$在$x_0$处是$G$-可微分的且$dT(x_0)=DT(x_0)$.

**证明** 据定理2·6，有

$$T(x_0+h)-Tx_0=DT(x_0)h+R(x_0)h$$

其中$x_0+h\in\mathscr{D}(T)$, $h\neq\theta$. 因

$$\frac{1}{|t|}\|R(x_0)(th)\|=\|h\|\left(\frac{1}{\|th\|}\|R(x_0)(th)\|\right)\to 0\ (t\to 0)$$

所以，依定理2·4，$T$在$x_0$处$G$-可微分且$dT(x_0)=DT(x_0)$

证毕

命题2·2的逆命题不成立，即$G$-可微分的算子不一定是$F$-可微分的. 这可从数学分析中的熟知事实："即使沿任何方向的方向导数都存在，也未必有全微分"得出. 参考文献[9]中第一章给出了$G$-可微分的Caratheodory映射而不是$F$-可微的例子. 那么在什么条件下$G$-可微分能保证$F$-可微分呢？我们有如下结果.

**定理2·7**(Vainberg M. M., 1952) 设$X$、$Y$同定义2·4, $\Omega\subset X$是凸开集，$T:\Omega\to Y$在$\Omega$上$G$-可微分，且导映射$dT$在$\Omega$上连续，则$T$在$\Omega$上$F$-可微分且$DT=dT$.

**证明** 设$x_0\in\Omega$，则存在$x_0$的球邻域$B(x_0,r)=\{x\in X\mid\|x-x_0\|<r\}\subset\Omega$. 设$x_0+h\in B(x_0,r)$，记$q(x_0)h=T(x_0+h)-Tx_0-dT(x_0)h$. 据定理2·6，只需证明$\|q(x_0)h\|=o(\|h\|)$.

若对一切$x_0+h\in B(x_0,r)$, $q(x_0)h=\theta$，则结论已得证. 设对于某$x_0+h\in B(x_0,r)$, $q(x_0)h\neq\theta$，据Hahn-Banach定理，存在$e\in Y^*$, $\|e\|=1$，且有$\|q(x_0)h\|=(e,q(x_0)h)$. 依定理2·3与$G$-导算子

的线性有界性，有

$$\begin{aligned}\|q(x_0)h\| &= (e, T(x_0+h)-Tx_0-dT(x_0)h)\\ &= (e, (dT(x_0+\tau h)-dT(x_0))h)\\ &\leqslant \|dT(x_0+\tau h)-dT(x_0)\|\|h\|,\end{aligned}$$

其中 $\tau\in(0,1)$. 由 $G$-导映射 $dT$ 的连续性，有

$$\frac{1}{\|h\|}\|q(x_0)h\|\to 0(\|h\|\to 0).$$

证毕

前面我们说过，$G$-可微分不能保证算子的连续性，下面证明 $F$-可微分却能保证这一点

**命题 2·8** 设 $X,Y$ 为实线性赋范空间，$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$ 在 $x_0\in\mathscr{D}(T)$ 处 $F$-可微分，则 $T$ 在 $x_0$ 处连续.

**证明** 据定理 2·6，有

$$\|T(x_0+h)-Tx_0\|\leqslant\|DT(x_0)\|\|h\|+\|R(x_0)h\|\to 0 \quad (\|h\|\to 0)$$

证毕

**定理 2·8** (链锁规则) 设 $X,Y,Z$ 皆为实线性赋范空间，$T_1:\mathscr{D}(T_1)\subset X\to Y$ 在 $x_0$ 处 $G$-可微分且 $T_1x_0\in\mathscr{D}(T_2)$，$T_2:\mathscr{D}(T_2)\subset Y\to Z$ 在 $T_1x_0$ 处 $F$-可微分，则 $T_3=T_2\circ T_1:\mathscr{D}(T_3)\subset\mathscr{D}(T_1)\to Z$ 在 $x_0$ 处 $G$-可微分且

$$dT_3(x_0)=DT_2(T_1x_0)\circ dT_1(x_0)$$

此外，若 $T_1$ 为 $F$-可微分的，则 $T_3$ 亦为 $F$-可微分的且

$$DT_3(x_0)=DT_2(T_1x_0)\circ DT_1(x_0)$$

**证明** 设 $h\in X, h\neq\theta$ 及 $x_0+h\in\mathscr{D}(T_1)$，由于 $x_0$ 是 $\mathscr{D}(T_1)$ 的内点，$T_1x_0$ 是 $\mathscr{D}(T_2)$ 的内点并由命题2·1之(ii)，因而存在 $\alpha=\alpha(h)>0$，当 $|t|<\alpha$ 时，有 $x_0+th\in\mathscr{D}(T_1)$ 且 $T_1(x_0+th)\in\mathscr{D}(T_2)$.

对于 $0<|t|<\alpha$，依算子 $DT_2(T_1x_0)$ 的线性有界性，有

$$\frac{1}{|t|}\|T_3(x_0+th)-T_3x_0-tDT_2(T_1x_0)\circ dT_1(x_0)h\|$$

$$\leqslant\frac{1}{|t|}\|T_2(T_1(x_0+th))-T_2(T_1x_0)$$

$$-DT_2(T_1x_0)\circ(T_1(x_0+th)-T_1x_0)\|$$

$$+\frac{1}{|t|}\|DT_2(T_1x_0)\|\|T_1(x_0+th)-T_1(x_0)-tdT_1(x_0)h\|$$

由 $T_1$ 在 $x_0$ 处 $G$-可微分，知上式第二项趋于零 $(t\to0)$. 对适合 $T_1(x_0+th)-T_1x_0=\theta$ 的一切 $t$，上式第一项是零. 否则可写成

$$\frac{\|T_2(T_1(x_0+th))-T_2(T_1x_0)-DT_2(T_1x_0)\circ(T_1(x_0+th)-T_1x_0)\|}{\|T_1(x_0+th)-T_1x_0\|}$$

$$\cdot\frac{\|T_1(x_0+th)-T_1(x_0)\|}{|t|}$$

由命题 2·1 之(ii)，$\|T_1(x_0+th)-T_1(x_0)\|\to0(t\to0)$. 因为 $T_2$ 在 $T_1x_0$ 处是$F$-可微分的，所以上式第一个因子当$t\to0$ 时是趋近于零的，而第二个因子保持有界，因此上式趋近于零$(t\to0)$.

至于当 $T_1$ 是 $F$-可微分时，只要在上述推导中抹掉 $t$，令$\|h\|\to0$ 便得证.

### 2·4 性质与实例

由定义可直接推出求导运算的下列性质.

**命题 2·3** 设 $X,Y$ 均为实线性赋范空间.

(i) 设 $U\subset X$ 是开集，$x_0\in U$，$T$、$S:U\to Y$ 于 $x_0$ 处 $F$-可微分($G$-可微分)，则对任何实数 $a,b$，$aT+bS$ 于 $x_0$ 处 $F$-可微分($G$-可微分)且

$$D(aT+bS)(x_0)=aDT(x_0)+bDS(x_0)$$

$$(d(aT+bS)(x_0)=adT(x_0)+bdS(x_0))$$

(ii) 常值映射的导映射是 $\theta$，即若对某 $y_0\in Y$，有 $Tx=y_0(\forall$

$x\in X$)，则 $dT(x)=\theta$.

(iii) 若 $A\in\mathscr{B}(X,Y)$，则 $A$ 在 $X$ 上 $F$-可微分且 $DA(x)=A$ 或 $D$ 为取值为 $A$ 的常值映射.

从链锁规则(定理 2·8)可直接推出

$$D(A\circ T)(x_0)=A\circ DT(x_0)$$

下面举出几个实例，以利于熟悉求导运算.

**例 2** 设 $R^n$ 与 $R^m$ 分别为 $n$ 维和 $m$ 维实线性赋范空间，$\Omega$ 为 $R^m$ 中的开集，映射 $f:\ \Omega\subset R^m\to R^n$. 设 $x_0=(\xi_1^{(0)},\ \xi_2^{(0)},\ \cdots,\ \xi_m^{(0)})\in\Omega$，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)\in R^m$，$y=f(x)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in R^n$ 和 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，这样

$$\eta_i=f_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m),\ i=1,2,\cdots,n$$

我们假设在 $x_0$ 处存在 $G$-导算子 $f'(x_0)$，它是从 $R^m$ 到 $R^n$ 的线性算子. 由线性代数知，$f'(x_0)$ 是 $n\times m$ 矩阵. 设

$$f'(x_0)=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots\cdots c_{1m}\\ c_{21} & c_{22}\cdots\cdots c_{2m}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_{n1} & c_{n2}\cdots\cdots c_{nm}\end{pmatrix}=(c_{ij}) \tag{2·4}$$

由

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t}=(c_{ij})x$$

及(2·4)得

$$\lim_{t\to0}\frac{f_i(\xi_1^{(0)}+t\xi_1,\cdots,\xi_m^{(0)}+t\xi_m)-f_i(\xi_1^{(0)},\cdots,\xi_m^{(0)})}{t}$$

$$=(c_{i1},\cdots,c_{im})\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_m\end{pmatrix}_{i=1,\cdots,n\cdot} \tag{2·5}$$

因为上列诸式对任何 $x\in R^m$ 皆成立，故取 $x_k=(\overbrace{0,\cdots,0,1}^{k},\ 0,\ \cdots,0)$ $(k=1,2,\cdots,m)$，代入(2·5)式就有

$$\frac{\partial f_i(\xi_1^{(0)},\cdots,\xi_m^{(0)})}{\partial \xi_k}=c_{ik}(i=1,\cdots,n;k=1,2,\cdots,m).$$

所以，$f$ 的 $G$-导算子是 Jacobi 矩阵

$$f'(x_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial \xi_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial \xi_m}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial \xi_1} \qquad \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial \xi_m}\end{pmatrix} \tag{2·6}$$

**注** 我们能够举例说明，只设每个函数的各个一阶偏导数都存在，虽然可以做出它们的 Jacobi 矩阵，但由这函数组构成的映射不存在 $G$-导算子，如例 1.

**例 3** 考虑 Hammerstein 积分算子

$$(Tx)(t)=\int_a^b k(t,s)g(s,x(s))ds,$$

此处假定核 $k(t,s)$ 在正方形 $a\leqslant t,\ s\leqslant b$ 上连续，$g(u,v)$ 在 $a\leqslant u\leqslant b$，$-\infty<v<+\infty$ 上连续，$g'_v(u,v)$ 在这一区域上一致连续. 易验证 $T:C[a,b]\to C[a,b]$，$C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数空间. 我们来证明 $T$ 在全空间上是 $F$-可微分的. 事实上，对任何 $h(s)\in C[a,b]$，有

$$\begin{aligned}(T(x+h)-Tx)(t)&=\int_a^b k(t,s)g(s,x(s)+h(s))ds\\&\quad-\int_a^b k(t,s)g(s,x(s))ds\\&=\int_a^b k(t,s)[g(s,x(s)+h(s))\\&\quad-g(s,x(s))]ds\end{aligned}$$

按 Lagrange 公式

$$\begin{aligned}&g(s,x(s)+h(s))-g(s,x(s))\\&=g'_v(s,x(s)+\theta(s)h(s))h(s),\quad 0\leqslant\theta(s)\leqslant 1\end{aligned}$$

其次我们有

$$g'_v(s, x(s)+\theta(s)h(s)) = g'_v(s, x(s)) + \alpha(s, x(s), \theta(s)h(s))$$

当$\|h\| \longrightarrow 0$，即 $h(s)$在$[a,b]$上一致地趋近于零时，由于$g'_v$一致连续，从而$\alpha(s,x(s),\theta(s)h(s))$在$[a,b]$上一致地趋近于零．因而

$$T(x+h)-Tx = \int_a^b k(t,s)g'_v(s,x(s))h(s)ds + \int_a^b k(t,s)\alpha(s,x(s),\theta(s)h(s))h(s)ds = Ah + R(x,h)$$

其中

$$Ah = \int_a^b k(t,s)g'_v(s,x(s))h(s)ds$$

是$C[a,b]$上的有界线性算子，而

$$R(x,h) = \int_a^b k(t,s)\alpha(s,x(s),\theta(s)h(s))h(s)ds$$

因为

$$\|R(x,h)\| = \max_t \left| \int_a^b k(t,s)\alpha(s,x(s),\theta(s)h(s))h(s)ds \right| \leqslant \max_{t,s}|k(t,s)| \|\alpha(s,x(s),\theta(s)h(s))(b-a)\| \|h\|$$

因此，当$\|h\|\to 0$时，

$$\frac{\|R(x,h)\|}{\|h\|} \leqslant c\|\alpha(s,x(s),\theta(s)h(s))\| \to 0$$

所以，$T$是$F$-可微的且

$$DT(x)h = \int_a^b k(t,s)g'_v(s,x(s))h(s)ds$$

**例 4** 设$X$为实自反Banach空间，$A\in\mathscr{B}(X,X^*)$且$A$是正算子，即$(Ax,x)\geqslant 0$．显然它的共轭算子$A^*\in\mathscr{B}(X,X^*)$．考虑泛函$\varphi(x)=(Ax,x)$的可微性．我们有

$$\varphi(x+th)-\varphi(x)=(Ax+tAh,x+th)-(Ax,x)$$
$$=t(Ax,h)+t(A^*x,h)+t^2(Ah,h)$$

因而 $\mathrm{grad}\varphi(x)=(A+A^*)x$. 本书用 $\langle,\rangle$ 表内积. 特别, 当 $X$ 为 Hilbert 空间, $A$ 为恒等算子时, 得

$$\mathrm{grad}\langle x,x\rangle=2x,\mathrm{grad}\|x\|=\frac{x}{\|x\|}(x\neq 0).$$

**例 5** 设 $\Omega$ 是 $E^n$ 中的 Lebesgue 可测集. 我们来计算 $L^p(\Omega)$ $(p>1)$ 中 $\|\cdot\|$ 的梯度. 当 $p=2$ 时, 例 4 已解决.

先设 $1<p<2$. 考虑 $E^1$ 上的实函数

$$\varphi(\lambda)=(|1+\lambda|^p-1-p\lambda)|\lambda|^{-p}.$$

易验证

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\varphi(\lambda)=1,\ \lim_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda)=0.$$

由此知 $\varphi$ 是有界的, 故存在 $c_1,c_2>0$, 使得

$$c_1|\lambda|^p\leqslant|1+\lambda|^p-1-p\lambda\leqslant c_2|\lambda|^p,\lambda\in E^1$$

当 $h,x\in L^p(\Omega)$, $x\neq\theta$ 时, 在上式中代入 $\lambda=th(s)/x(s)$, 积分得

$$c_1\|th\|^p\leqslant\|x+th\|^p-\|x\|^p-pt\int_\Omega h(s)|x(s)|^{p-1}\mathrm{sgn}\,x(s)ds$$
$$\leqslant c_2\|t_2h\|^p.$$

除以 $t$, 并令 $t\to 0$ 得

$$\delta(\|x\|^p)h=p\int_\Omega|x(s)|^{p-1}\mathrm{sgn}x(s)h(s)ds \qquad (2\cdot7)$$

由于 $p|x(s)|^{p-1}\mathrm{sgn}x(s)\in L^q(\Omega)$, 知(2·7)式右端关于 $h$ 是有界线性的, 所以 $\|x\|^p$ 是 $G$-可微分的. 因为 $p|x(s)|^{p-1}\cdot\mathrm{sgn}x(s)=p|x(s)|^{p-2}x(s)$, 所以

$$\mathrm{grad}\|x\|^p=p|x(s)|^{p-2}x(s),x\neq\theta \qquad (2\cdot8)$$

再设 $p>2$. 考虑 $E^1$ 上的实函数

$$\psi(\lambda)=(|1+\lambda|^p-1-p\lambda)(|\lambda|^p+\lambda^2)^{-1}$$

重复上面的方法，也得到(2·8)式.

记 $g(x)=\|x\|^p$，则 $\|x\|=(g(x))^{\frac{1}{p}}$，而 $g^{\frac{1}{p}}$ 是实变量的实函数，当然是 $F$-可微的．前面已证得 $g(x)$ 是 $G$-可微的，根据定理 2·8，$(g(x))^{\frac{1}{p}}$ 是 $F$-可微的，即 $\|x\|$ 是 $F$-可微的．按链锁规则，

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\|x\| &= \frac{1}{p}(g(x))^{\frac{1}{p}-1}(\operatorname{grad}\|x\|^p)\\ &= \frac{1}{p}\|x\|^{1-p}(\operatorname{grad}\|x\|^p)\end{aligned}$$

由(2·8)式，

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\|x\| &= \frac{1}{p}\|x\|^{1-p}p|x(s)|^{p-2}x(s)\\ &= \|x\|^{1-p}|x(s)|^{p-2}x(s),\ x\neq\theta \qquad (2\cdot 9)\end{aligned}$$

用完全同样的方法，只需在上述推导中将积分换成 $\Sigma$ 求和，容易看出空间 $l^p(p>1)$ 中的范数，当 $x\neq\theta$ 时是 $F$- 可微的，并有

$$\operatorname{grad}\|x\| = \|x\|^{1-p}z, \qquad x\neq\theta \qquad (2\cdot 10)$$

其中 $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^p$，$z=(|x_1|^{p-2}x_1,|x_2|^{p-2}x_2,|x_3|^{p-2}x_3,\cdots)\in l^q$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

## §3 Riemann 积分

**定义 3·1** 自变量为实数或复数，取值在线性赋范空间中的算子，称为抽象函数．

本书只考虑 $t$ 为实变量，$X$ 为实空间的情形．设给定抽象函数 $x:\mathscr{D}(x)\subset E^1\to X$，一般来说，$\mathscr{D}(x)$ 是一个区间．仿通常定义，它的导映射

$$\frac{dx(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\in X$$

另一方面，按定义 2·4，它的 $F$-导映射

$$x'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\in\mathscr{B}(E^1,X)$$

自然期望$\frac{dx(t)}{dt}=x'(t)$，这样就需要分析它们分别所从属的空间 $X$ 与 $\mathscr{B}(E^1,X)$. 设 $A:E^1\to X$ 是有界线性算子，则对一切 $t\in E^1$，有

$$A(t)=A(t\cdot 1)=tA(1).$$

当 $A$ 给定后，$A(1)$是 $X$ 中一个确定元素. 易证$\|A\|=\|A(1)\|$. 可见，算子 $A$ 是向量 $A(1)$ 右乘 $t$ 的结果. 反之，对任一$x_0\in X$，令 $A(t)=tx_0$. 显然如此定义的算子$A\in\mathscr{B}(E^1,X)$，且$\|A\|=\|x_0\|$. 因而 $X$ 与$\mathscr{B}(E^1,X)$ 其实是等距同构的. 总之，关于抽象函数的微分学，不仅可以把它纳入算子的 Fréchet 微分理论，同时又有 $\frac{dx(t)}{dt}\in X$.

下面我们来讨论抽象函数的 Riemann 积分，它是数学分析中 Riemann 积分的推广.

设 $X$ 是实线性赋范空间，$x:I=[a,b]\to X$，作 $I$ 上的分划 $P:a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$. 记 $\omega(P)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|t_i-t_{i-1}|$，$S(P)=\sum\limits_{i=1}^{n}x(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$ $(\xi_i\in[t_{i-1},t_i])$，称 $S(P)$ 是 Riemann 和.

若存在 $J\in X$，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\omega(P)<\delta$ 时，不论 $\xi_i$ 怎样取法，恒有 $\|S(P)-J\|<\varepsilon$，则称 $x(t)$ 在 $I$ 上 (R) 可积，而 $J$ 称为 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 (R) 积分，记作 $J=\int_a^b x(t)dt$.

容易证明，这种积分具有通常实函数定积分的有关性质，在此不详述了.

**定理 3·1** 设 $X$ 是 Banach 空间，$x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积.

**证明** 因 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由数学分析中的证明可知，$x(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $t',t''\in[a,b]$ 且 $|t'-t''|<\delta$ 时，有 $\|x(t')-x(t'')\|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

设 $P$ 是 $[a,b]$ 的一个分划且 $\omega(P)<\delta(\varepsilon)$，$P'$ 是 $P$ 的加细，则 $\omega(P')<\delta(\varepsilon)$ 且由上式有

$$\|S(P)-S(P')\|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{3·1}$$

现取 $[a,b]$ 的一列分划 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $P_{n+1}$ 是 $P_n$ 的加细 $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\omega(P_n)\to 0\ (n\to\infty)$. 依 (3·1) 式，$\{S(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $X$ 中的 Cauchy 序列. 由 $X$ 的完备性，存在 $J\in X$，$S(P_n)\to J\ (n\to\infty)$. 即，存在 $N=N(\varepsilon)$，$n\geqslant N$ 时，有

$$\omega(P_n)<\delta(\varepsilon);\ \|S(P_n)-J\|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{3·2}$$

设 $P$ 是 $[a,b]$ 的任一分划且 $\omega(P)<\delta(\varepsilon)$，并记 $P'$ 是 $P$ 与 $P_N$ 合成的 $[a,b]$ 的分划，则据 (3·1) 与 (3·2) 两式有

$\|S(P)-J\|\leqslant\|S(P)-S(P')\|+\|S(P')-S(P_N)\|+\|S(P_N)-J\|<\varepsilon$. 因此 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积.

证毕

以下设 $X$ 是实 Banach 空间，$I=[a,b]$，$C(I,X)$ 是 $I$ 到 $X$ 的连续抽象函数的全体.

**命题 3·1** 设 $x\in C(I,X)$，则

$$\left\|\int_a^b x(t)dt\right\|\leqslant\int_a^b\|x(t)\|dt\leqslant(b-a)\max_{t\in I}\|x(t)\|$$

**证明** 因 $x(t)\in C(I,X)$，所以 $\|x(t)\|\in C[a,b]$，从而

$\int_a^b \|x(t)\| dt$ 与$\max\limits_{t\in I}\|x(t)\|$皆有意义.

设 $P: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 则有

$\|S(P)\|=\|\sum\limits_{i=1}^{n} x(\xi_i)(t_i-t_{i-1})\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\|x(\xi_i)\|(t_i-t_{i-1})$ 令 $\omega(P)\to 0$, 则有

$$\left\|\int_a^b x(t)dt\right\| \leqslant \int_a^b \|x(t)\| dt \leqslant (b-a)\max_{t\in I}\|x(t)\|.$$

证毕

**命题 3·2** 设 $x_n\in C(I,X)$, $x_n(t)$在 $I$ 上一致收敛于 $x(t)$, 则 $x(t)\in C(I,X)$且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt=\int_a^b x(t)dt$$

**证明** 显然, $x(t)\in C(I,X)$.

根据命题 3·1,

$$\left\|\int_a^b [x_n(t)-x(t)]dt\right\| \leqslant (b-a)\max_{t\in I}\|x_n(t)-x(t)\|\to 0, (n\to\infty)$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt=\int_a^b x(t)dt.$

证毕

**命题 3·3** 设 $x\in C(I,X)$, 记 $y(t)=\int_a^t x(s)ds$, $(t\in I)$, 则 $y(t)$在 $I$ 上 $F$-可微分且

$$\frac{d}{dt}y(t)=x(t)$$

注意, 此处在$[a,b]$的端点的 $F$-导算子, 完全类似于数学分析中左导数和右导数的定义.

**证明** 设 $t_0\in I$, $\Delta t>0$ 且 $t_0+\Delta t\in I$, 则有

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}[y(t_0+\Delta t)-y(t_0)]-x(t_0)\right\|$$

$$=\left\|\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}x(t)dt-x(t_0)\right\|$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\left\|\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}[x(t)-x(t_0)]dt\right\|\leqslant\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\Delta t}\|x(t)-x(t_0)\|$$

$$\to 0(\Delta t\to 0)$$

对于 $\Delta t<0$，上述结论亦成立．对 $t_0=b$ 的情形，可类似证明．故 $y(t)$ 在 $I$ 上 $F$-可微分且 $\frac{d}{dt}y(t)=x(t)$.

**证毕**

下列结论是关于抽象函数微积分的基本定理.

**定理3·2** 设 $X$ 为实Banach空间，$x:(a,b)\subset E^1\to X$ 在 $(a,b)$ 上具有连续的 $F$-导映射，则

$$\int_c^d x'(s)ds=x(d)-x(c)$$

其中 $[c,d]\subset(a,b)$ 且 $d-c<\infty$.

**证明** 设 $f\in X^*$，则由 $f$ 的线性和连续性以及 $f'$ 的性质，有

$$f\left(\int_c^d x'(s)ds\right)=\int_c^d f(x'(s))ds$$

$$=\int_c^d f'(x(s))ds=f(x(d))-f(x(c))$$

$$=f(x(d)-x(c))$$

由 $f$ 的任意性知，$\int_c^d x'(s)ds=x(d)-x(c)$.

**证毕**

对于抽象函数还有其它类型的积分．比如，若存在 $x_0\in X$，使对一切 $f\in X^*$，有 $\int_a^b f(x(t))dt=f(x_0)$，则称 $x(t)$ 是弱(R) 可积的．可以证明，(R)可积的抽象函数一定为弱 (R)可积的．弱(R)积分亦有许多类似(R) 积分的性质．此外，也可以引入抽象函数的Lebesgue 积分，Gelfand-Pettis 积分和 Bochner 积分等概念，

这里就不去讨论这些问题了.

下面介绍基本定理的一个应用.

给定 Banach 空间中的常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(a)=x_0\end{cases}\tag{3·3}$$

其中 $x\in C(I,X)$, $I=[a,b]$, $X$是 Banach 空间, $D$ 是 $X$ 中的有界开集, $f\in C(I\times D,X)$, $x_0\in X$. 利用基本定理, 容易验证问题 (3·3) 等价于下述积分方程

$$x(t)=x_0+\int_a^t f(s,x(s))ds \tag{3·4}$$

将问题(3·3)转化成(3·4)的好处是便于求近似解.

## §4 高阶微分

### 4·1 $n$线性算子

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y$ 是 $n+1$ 个实线性赋范空间.

**定义 4·1** 称 $A:X_1\times\cdots\times X_n\to Y$ 是 $n$ 线性算子, 是指对于任意固定的 $(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$, $A_ix=A(x_1,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n)$ 是 $X_i$ 到 $Y$ 的线性算子 $(i=1,2,\cdots,n)$. 此外, 若存在 $M>0$, 满足

$$\|A(x_1,\cdots,x_n)\|\leqslant M\|x_1\|\cdots\|x_n\| \tag{4·1}$$

则称 $A$ 是有界的 $n$ 线性算子. 满足(4·1)式的最小 $M$ 称为 $A$ 的范数, 记作$\|A\|$. 易证$\|A\|=\sup\limits_{\|x_1\|\leqslant 1,\cdots,\|x_n\|\leqslant 1}\|A(x_1,\cdots,x_n)\|$.

记$\mathscr{B}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 是从 $X_1\times\cdots\times X_n$ 到 $Y$ 的全体有界 $n$ 线性算子, 按通常的算子加法, 数乘及上列的算子范数, 它也构成实线性赋范空间. 若 $Y$ 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 亦为 Banach 空间. 特别地, 当 $X_1=\cdots X_n=X$时, 记

$\mathscr{B}_1(X,Y)=\mathscr{B}(X,Y),\mathscr{B}_2(X,Y)=\mathscr{B}(X,\mathscr{B}_1(X,Y)),\cdots,$

$\mathscr{B}_n(X,Y)=\mathscr{B}(X,\mathscr{B}_{n-1}(X,Y))$.

下面我们来考虑 $\mathscr{B}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 与 $\mathscr{B}_n(X,Y)$ 的关系.

**定理 4·1** $\mathscr{B}(\overbrace{X,\cdots,X}^{n};Y)$ 与 $\mathscr{B}_n(X,Y)$ 等距同构.

**证明** 仅证 $n=2$ 的情形. 一般情形可由归纳法得到. 首先建立 $\mathscr{B}(X,X;Y)$ 到 $\mathscr{B}_2(X,Y)$ 之间的一个一一对应. 任取 $A\in\mathscr{B}(X,X;Y)$，对任意的 $x\in X$，记 $A_x=A(x,\cdot)$，则 $A_x\in\mathscr{B}(X,Y)\ (x\in X)$. 令 $Bx=A_x\ (x\in X)$. 因 $A(x_1,x_2)$ 是双线性的，所以 $B$ 是 $X$ 到 $\mathscr{B}(X,Y)$ 的线性算子. 由

$$\|Bx\|=\|A_x\|=\sup_{\|y\|=1}\|A(x,y)\|\leqslant\|A\|\|x\|$$

得 $B\in\mathscr{B}_2(X,Y)$ 且

$$\|B\|\leqslant\|A\| \tag{4·2}$$

让 $A$ 对应 $B$，则不难验证 $\mathscr{B}(X,X;Y)$ 到 $\mathscr{B}_2(X,Y)$ 的这种对应是一对一的. 下面证明这种对应是满对应.

任取 $B\in\mathscr{B}_2(X,Y)=\mathscr{B}(X,\mathscr{B}(X,Y))$. 令

$$A(x,y)=(Bx)y\quad(x,y\in X)$$

则 $A$ 是双线性算子且

$$\|A(x,y)\|=\|(Bx)y\|\leqslant\|Bx\|\|y\|\leqslant\|B\|\|x\|\|y\|$$

即 $A\in\mathscr{B}(X,X;Y)$ 且

$$\|A\|\leqslant\|B\| \tag{4·3}$$

此时，$(Bx)(\cdot)=A(x,\cdot)$，即在上述对应下，$A$ 对应于 $B$.

其次，不难验证这种对应是线性的.

最后，由(4·2)、(4·3)两式知，这种对应是等距的. 因此，$\mathscr{B}(X,X;Y)$ 与 $\mathscr{B}_2(X,Y)$ 等距同构.

证毕.

## 4·2 高阶微分

**定义 4·2** 设 $X,Y$ 皆为实线性赋范空间，$T:\Omega\subset X\to Y$，$\Omega$ 是开集. $T$ 在 $\Omega$ 上 $F$-可微分（$G$-可微分），$x_0\in\Omega$. 称 $T$ 在 $x_0$ 处是二阶 $F$-可微分的（二阶 $G$-可微分的），是指 $T$ 的 $F$-导映射 $DT$（$G$-导映射 $dT$）在 $x_0$ 处是 $F$-可微分的（$G$-可微分的）. 记 $D^2T=D(DT)$，称作 $T$ 的二阶 $F$-导映射（$d^2T=d(dT)$，称作 $T$ 的二阶 $G$-导映射）.

符号 $D^2T(x_0)(h_1,h_2)$ 表示 $D[(DT)(x_0)h_1]h_2$，$d^2T(x_0)(h_1,h_2)$ 表示 $d[(dT)(x_0)h_1]h_2$. 不难看出

(i) $D^2T(x_0)(h_1,h_2)$ 关于 $(h_1,h_2)$ 是有界双线性的.

(ii) $D^2T(x_0):X\times X\to Y$，$D^2T:X\to\mathscr{B}(X,X;Y)$.

同样，可归纳地定义 $D^nT(x_0)(h_1,\cdots,h_n)=D[D^{n-1}T(x_0)(h_1,\cdots h_{n-1})]h_n$，$D^nT(x_0)(h_1,\cdots,h_n)$ 关于 $(h_1,\cdots,h_n)$ 是有界 $n$ 线性的，即，

$D^nT(x_0)\in\mathscr{B}(\overbrace{X,\cdots,X}^{n};Y)$，$D^nT:X\to\mathscr{B}(\overbrace{X,\cdots,X}^{n};Y)$. 类似地 $d^nT(x_0)(h_1,\cdots,h_n)=d[d^{n-1}T(x_0)(h_1,\cdots,h_{n-1})]h_{n-1}$. 值得注意的是，$D^nT(x_0)(h_1,\cdots,h_n)$ 关于 $(h_1,\cdots,h_n)$ 有一个次序问题. 对高阶微分来说，并不是哪种微分都与次序无关. $G$-可微分的算子与次序有关. 这里仅考虑 $F$-微分.

**定理 4·2** 设 $X,Y$ 皆为实线性赋范空间，$T:\Omega\to Y$，$\Omega\subset X$ 是开集，$x_0\in\Omega$，$T$ 在 $x_0$ 处 $n$ 阶 $F$-可微分，则

$$D^nT(x_0)(h_1,\cdots,h_n)=D^nT(x_0)(h_{p(1)},\cdots,h_{p(n)})$$

其中 $(p(1),\cdots,p(n))$ 是 $(1,\cdots,n)$ 的任一排列.

**证明** 仅证 $n=2$ 时，$D^2T(x_0)(h,k)=D^2T(x_0)(k,h)$.

因 $D^2T(x_0)(h,k)$ 是双齐次的，即 $D^2T(x_0)(th,sk)=tsD^2T(x_0)(h,k)$，所以作如下假定不影响结论的一般性：存在 $r>0$，$\|h\|=\|k\|=r$ 且 $x_0+sh+tk\in\Omega$ $(0\leqslant s,t\leqslant 1)$. 令

$$\varphi(t)=T(x_0+th+k)-T(x_0+th)$$

$$\psi(t)=T(x_0+h+tk)-T(x_0+tk)$$

则 $\varphi,\psi:[0,1]\to Y$. 经计算得，

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\psi(1)-\psi(0)$$

$$=T(x_0+h+k)-T(x_0+h)-T(x_0+k)+T(x_0)$$

$$\varphi'(t)=[DT(x_0+th+k)-DT(x_0+th)]h$$

$$=[DT(x_0+th+k)-DT(x_0)]h$$

$$-[DT(x_0+th)-DT(x_0)]h.$$

$$\psi'(t)=[DT(x_0+h+tk)-DT(x_0+tk)]k$$

$$=[DT(x_0+h+tk)-DT(x_0)]k$$

$$-[DT(x_0+tk)-DT(x_0)]k$$

而

$$DT(x_0+th+k)-DT(x_0)=D^2T(x_0)(th+k)+o(th+k),$$

$$DT(x_0+th)-DT(x_0)=D^2T(x_0)(th)+o(th)$$

所以，

$$\varphi'(t)=D^2T(x_0)(k,h)+[o(th+k)+o(th)]h$$

其中 $o(h)$ 表示 $\frac{1}{\|h\|}\|o(h)\|\to 0(\|h\|\to 0)$.

类似地，

$$\psi'(t)=D^2T(x_0)(h,k)+[o(h+tk)+o(tk)]k$$

对于任意给定的 $e\in Y^*$，由广义 Lagrange 公式，存在 $\tau_1,\tau_2\in(0,1)$，有

$$(e,\varphi(1)-\varphi(0))=(e,\varphi'(\tau_1))$$

$$(e,\psi(1)-\psi(0))=(e,\psi'(\tau_2))$$

因 $\varphi(1)-\varphi(0)=\psi(1)-\psi(0)$，所以有

$$(e,D^2T(x_0)(k,h))+(e,[o(\tau_1h+k)+o(\tau_1h)]h)$$

$$=(e,D^2T(x_0)(h,k))+(e,[o(h+\tau_2k)+o(\tau_2k)]k)$$

用 $\lambda h, \lambda k$ 分别代替 $h, k$，则有

$$(e, D^2T(x_0)(k,h) - D^2T(x_0)(h,k))$$

$$= \frac{1}{\lambda}(e, o(\lambda h + \lambda\tau_2 k)k + o(\lambda\tau_1 h + \lambda k)h$$

$$+ o(\lambda\tau_1 h)h + o(\lambda\tau_2 k)k) \to 0 \quad (\lambda \to 0)$$

故

$$(e, D^2T(x_0)(k,h) - D^2T(x_0)(h,k)) = 0$$

由 $e$ 的任意性得，$D^2T(x_0)(h,k) = D^2T(x_0)(k,h)$.

证毕

由定理 4·2，可记 $D^nT(x)(h, \cdots, h) = D^nT(x)h^n$. 下列结果是数学分析中 Taylor 公式的推广.

**定理 4·3**(Taylor 公式) 设 $X$、$Y$ 皆为实线性赋范空间，$T \in C^{n+1}(\Omega, Y)$，即 $T$ 有连续的 $n+1$ 阶 $F$-导映射，其中 $\Omega$ 是 $X$ 的凸开集. 则对于任意的 $x_0 \in \Omega$ 及 $h \in X$，当 $x_0 + h \in \Omega$ 时，有

$$T(x_0+h) = Tx_0 + DT(x_0)h + \cdots + \frac{1}{n!}D^nT(x_0)h^n$$

$$+ \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n D^{n+1}T(x_0+th)h^{n+1}dt$$

**证明** 作抽象函数

$$V(t) = T(x_0+th) + (1-t)DT(x_0+th)h + \cdots +$$

$$\frac{(1-t)^n}{n!}D^nT(x_0+th)h^n$$

对于给定的 $x_0$ 与 $h$，因 $\Omega$ 是凸开集，所以存在 $\alpha_h > 0$，使得 $V$ 在 $(-\alpha_h, 1+\alpha_h)$ 上有定义. 这样，$V \in C^1([0,1], Y)$，因此

$$V(1) - V(0) = \int_0^1 \frac{dV}{dt}dt$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n D^{n+1}T(x_0+th)h^{n+1}dt$$

证毕

## §5 反函数定理和隐函数定理

在数学分析中，我们已经知道反函数定理在讨论非线性方程的解的存在唯一性、解的连续性和可微性具有重要意义。与反函数定理密切相关的是隐函数定理，它是研究由多变元方程所确定的隐函数理论。本节把这两方面的结果推广到Banach空间中的非线性算子的情形。数学物理中的一些非线性问题，常常需要研究含复参数 $\lambda$ 的隐式方程 $F(x,\lambda)=0$ 的分歧理论，隐函数定理是研究分歧理论的基本工具之一。回想起在数学分析中可用逐步逼近法证明反函数定理和隐函数定理，而那种逐步逼近法推广到非线性算子就是 Banach 压缩映射原理。本节我们仍用这条原理去证明两条抽象定理。

压缩映射原理是说：设 $X$ 为 Banach 空间（只需完备距离空间就可以了），映射 $T$ 是闭球 $\bar{B}(x_0,r)(\subset X)$ 的自映射，即 $T(\bar{B}(x_0,r))\subset\bar{B}(x_0,r)$。若存在常数 $k$：$0<k<1$ 满足

$$\|Tx-Ty\|\leqslant k\|x-y\| \tag{5·1}$$

则 $T$ 在 $\bar{B}(x_0,r)$ 内有不动点。

我们把这一原理推广到映射 $T$ 依赖于参量的情形是很有用的。

**命题5·1** 设 $\bar{B}(x_0,r)$ 是 Banach 空间 $X$ 的闭球，$Y$ 是距离空间，映射 $T:\bar{B}(x_0,r)\times Y\to\bar{B}(x_0,r)$ 连续。又设对每一 $\beta\in Y$，映射 $T(x,\beta)$ 满足(5.1)式($k$ 不依赖于 $\beta$)，则映射 $f(\beta)=x_\beta$ ($x_\beta$ 是映射 $T(\cdot,\beta)$ 的唯一不动点)是 $Y$ 到 $X$ 内的连续映射。

**证明** 设 $\beta_0\in Y$，$\beta_n\to\beta_0$，则根据假设，$f(\beta_n)=x_{\beta_n}=T(x_{\beta_n},\beta_n)$，$f(\beta_0)=x_{\beta_0}=T(x_{\beta_0},\beta_0)$。由此得出

$$\|f(\beta_n)-f(\beta_0)\|=\|T(x_{\beta_n},\beta_n)-T(x_{\beta_0},\beta_0)\|$$
$$\leqslant\|T(x_{\beta_n},\beta_n)-T(x_{\beta_0},\beta_n)\|+\|T(x_{\beta_0},$$

$$\beta_n) - T(x_{\beta_0}, \beta_0)\|$$

$$\leqslant k\|x_{\beta_n} - x_{\beta_0}\| + \|T(x'_{\beta_0}, \beta_n) - T(x_{\beta_0}, \beta_0)\|$$

从而

$$\|f(\beta_n) - f(\beta_0)\| \leqslant \frac{1}{1-k}\|T(x_{\beta_0}, \beta_n) - T(x_{\beta_0}, \beta_0)\|$$

因为$T$关于$\beta$连续，故上式右端趋近于零.

证毕

**定理 5·1**（反函数定理） 设 $X, Y$ 均为实 Banach 空间，$x_0 \in X$，$T$ 为从 $x_0$ 的某开邻域到 $Y$ 中的连续可微算子. 又设 $T'(x_0)$ 是 $X$ 到 $Y$ 上的线性同胚，则 $T$ 是从 $x_0$ 的某邻域 $U(x_0)$ 到 $T(x_0)$ 的某邻域的局部同胚. 此外，如果 $\|y - T(x_0)\|$ 足够小，则迭代

$$x_{n+1} = x_n + [T'(x_0)]^{-1}[y - T(x_n)] \tag{5·2}$$

收敛于方程 $Tx = y$ 在 $U(x_0)$ 内的唯一解.

**证明** 首先，由 Banach 逆算子定理知，(5·2) 式中的 $[T'(x_0)]^{-1}$ 存在，且是有界线性的. 记 $T(x_0) = y_0$. 我们首先来证明当 $\|y - y_0\|$ 足够小时，方程 $T(x_0 + h) = y$ 唯一地确定了 $h$. 显然这方程等价于方程

$$T(x_0 + h) - Tx_0 = y - y_0 \tag{5·3}$$

因为 $T$ 在 $x_0$ 处连续可微，故 (5·3) 式可以写成 $T'(x_0)h + R(x_0)h = y - y_0$，即要从 $T(x_0 + h) = y$ 解出 $h$，只须证明存在唯一 $h$ 满足

$$h = [T'(x_0)]^{-1}[(y - y_0) - R(x_0)h]$$

其中余项 $R(x_0)h = T(x_0 + h) - Tx_0 - T'(x_0)h = o(\|h\|)$. 令

$$Ah = [T'(x_0)]^{-1}[y - y_0 - R(x_0)h] \tag{5·4}$$

这样，问题归结为 $A$ 有不动点. 下面来证明，当 $\varepsilon$ 充分小时，$A$ 是闭球 $\bar{B}(\theta, \varepsilon)$ 的自映射且为压缩的，从而存在唯一不动点. 实际上，根据 (5·4) 式，

$$T'(x_0)(Ah_2 - Ah_1) = R(x_0)h_1 - R(x_0)h_2$$

$$=T(x_0+h_1)-T(x_0+h_2)-T'(x_0)(h_1-h_2)$$

$$=\int_0^1\{T'(x_0+th_1+(1-t)h_2)-T'(x_0)\}\cdot(h_1-h_2)dt$$

由此得

$$\|Ah_2-Ah_1\|\leqslant\int_0^1\|[T'(x_0)]^{-1}\|\|T'(x_0+th_1+(1-t)h_2)-T'(x_0)\|\|h_1-h_2\|dt$$

因为$T$连续可微，所以当$\|h_1\|$，$\|h_2\|$充分小时，上式积分号下中间那项可任意小. 因此，存在$k<1$及$\varepsilon>0$，当$h_1$，$h_2\in\overline{B}(\theta,\varepsilon)$时，有

$$\|Ah_2-Ah_1\|\leqslant k\|h_2-h_1\|$$

今证$A$是$\overline{B}(\theta,\varepsilon)$的自映射. 事实上，如果

$$\|y-y_0\|<(1-k)\varepsilon\|[T'(x_0)]^{-1}\|^{-1} \tag{5·5}$$

则

$$\|A\theta\|=\|[T'(x_0)]^{-1}(y-y_0)\|<(1-k)\varepsilon.$$

从而，当$\|h\|\leqslant\varepsilon$时，

$$\|Ah\|\leqslant\|Ah-A\theta\|+\|A\theta\|\leqslant k\|h\|+\|A\theta\|\leqslant\varepsilon$$

这样，$A$是$\overline{B}(\theta,\varepsilon)$的自映射. 为了照顾到条件(5·5)，我们选取$\delta\leqslant\varepsilon$如此小，使得$T(\overline{B}(\theta,\delta))\subset\overline{B}(y_0,(1-k)\varepsilon\|[T'(x_0)]^{-1}\|^{-1})$，则由压缩映射原理，$A$在$\overline{B}(\theta,\delta)$内有唯一不动点，也就是说，方程$T(x_0+h)=y$有一个且仅有一个解.

显然，(5·4)式中的映射$A$对$(h,y)$连续，故由命题5·1，不动点$h$关于$y$连续，当然$x=x_0+h$对$y$也连续. 因此存在足够小的球$B(y_0,\eta)$，使得在该球上不仅$T^{-1}(y)=x$有意义，而且还是连续的.

最后，取$h_0=\theta$，则迭代$h_n=Ah_{n-1}$的极限即为$A$的不动点. 于是

$$x_n = x_0 + h_n = x_0 + Ah_{n-1}$$
$$= x_0 + [T'(x_0)]^{-1}[y - Tx_0 - R(x_0)h_{n-1}]$$
$$= x_0 + [T'(x_0)]^{-1}[y + T'(x_0)h_{n-1} - T(x_0 + h_{n-1})]$$
$$= x_{n-1} + [T'(x_0)]^{-1}(y - Tx_{n-1})$$

因此，迭代程序 (5·2) 式成立，点列 $\{x_n\}$ 的极限便是 $Tx=y$ 的唯一解.

证毕

**推论** 在定理 5·1 的假设下，$T^{-1}$ 是 $F$-可微分的，且 $[T^{-1}(y_0)]' = [T'(x_0)]^{-1}$.

**证明** 记 $Tx_0 = y_0, T(x_0 + h) = y_0 + k$，则

$$T^{-1}(y_0 + k) - T^{-1}(y_0) - [T'(x_0)]^{-1}k$$
$$= [T'(x_0)]^{-1}\{T'(x_0)h - k\}$$
$$= -[T'(x_0)]^{-1}\{T(x_0 + h) - Tx_0 - T'(x_0)h\}$$
$$= o(\|h\|) = o(\|k\|)$$

所以，$T^{-1}$ 可微分且在 $y_0$ 处 $[T^{-1}(y_0)]' = [T'(x_0)]^{-1}$.

证毕

下面我们来考虑由二变元算子方程所确定的隐函数理论. 设 $X$、$Y$、$Z$ 是实线性赋范空间，$U$、$V$ 分别是 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ 的邻域. 假定 $F: U \times V \to Z$. 考察方程

$$F(x, y) = \theta \tag{5·6}$$

设 $F(x_0, y_0) = \theta$. 试问在什么条件下，在初值 $(x_0, y_0)$ 的邻近，由方程 (5·6) 可唯一确定算子 $y = Tx$? 即 $y_0 = Tx_0$ 且对 $x_0$ 邻近的一切 $x$ 有

$$F(x, Tx) = \theta$$

算子 $T$ 称为方程 (5·6) 所确定的隐算子或隐映射. 我们干脆称为隐函数. 由此可看出，研究隐函数的存在性，就是要确定一些条件，在这些条件下，方程 (5·6) 对 $x_0$ 邻近中的每一 $x$ 有唯一解 $y$.

对二变元映射，与数学分析类似，也可以引入偏导算子与偏导映射的概念．设 $X, Y, Z$ 如上，映射 $T: \mathscr{D}(T) \subset X \times Y \to Z$，$(x_0, y_0)$ 是 $\mathscr{D}(T)$ 的内点．如果 $T(x, y_0)$ $(T(x_0, y))$ 在 $x_0(y_0)$ 处对 $x(y)$ 的 $F$-导算子存在，则称它为对 $x(y)$ 的偏导算子，记作 $T'_x(x_0, y_0)$ $(T'_y(x_0, y_0))$．显然 $T'_x(x_0, y_0) \in \mathscr{B}(X, Z)$ $(T'_y(x_0, y_0) \in \mathscr{B}(Y, Z))$．如果 $T$ 在开集 $U(\subset \mathscr{D}(T))$ 上的每一点对 $x$ 的 $F$-导算子都存在，则确定了一个 $T$ 对 $x$ 的 $F$-导映射 $T'_x(x, y)$，$T'_x: U \to \mathscr{B}(X, Z)$．

下面我们来证明著名的隐函数定理．

**定理 5·2**（隐函数定理） 设 $X$、$Y$、$Z$ 是实 Banach 空间，$U$、$V$ 分别是 $x_0 \in X$、$y_0 \in Y$ 的邻域．假设 $F: U \times V \to Z$ 连续，$F(x_0, y_0) = \theta$，$F'_y(x, y)$ 在 $U \times V$ 上存在且 $F'_y(x, y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 处连续．又设 $F'_y(x_0, y_0)$ 是 $Y$ 到 $Z$ 上的线性同胚．则存在开球 $B(x_0, r) \subset U$，$B(y_0, \delta) \subset V$ 和唯一的连续算子 $T: B(x_0, r) \to B(y_0, \delta)$，使得 $Tx_0 = y$ 且 $F(x, Tx) = \theta$ $(x \in B(x_0, r))$．

**证明** 不失一般性，可设 $x_0 = \theta$，$y_0 = \theta$，这是因为一般情形经平移可化为这种情形．由 Banach 逆算子定理，$[F'_y(\theta, \theta)]^{-1}$ 存在且有界线性．对给定 $U$ 中的 $x$，定义算子

$$A(x, y) = -[F'_y(\theta, \theta)]^{-1} \circ F(x, y) + y$$

($y$ 是变元)，显然，存在唯一 $y$ 满足方程 $F(x, y) = \theta$ 等价于 $A(x, y)$ 有不动点．

因为 $A'_y(\theta, \theta) = \theta$ 及 $A'_y(x, y)$ 在点 $(\theta, \theta)$ 处连续，故存在 $\alpha > 0$ 及 $\delta > 0$，使得在 $\bar{B}(\theta, \delta) \times \bar{B}(\theta, \delta) \subset U \times V$ 上，有 $\|A'_y(x, y)\| \leqslant \alpha$．于是，由定理 2·5（易知定理 2·5 对闭球仍成立），当 $x \in \bar{B}(\theta, \delta)$，$y$、$\bar{y} \in \bar{B}(\theta, \delta)$ 时，有

$$\|A(x, y) - A(x, \bar{y})\| \leqslant \alpha \|y - \bar{y}\| \qquad (5·7)$$

因为 $F(x, \theta)$ 连续，$F(\theta, \theta) = \theta$ 及 $\|[F'_y(\theta, \theta)]^{-1}\|$ 是定数，故存在 $r \leqslant \delta$，使得当 $x \in B(\theta, r)$ 时，有

$$\|A(x,\theta)\| = \|-[F'_y(\theta,\theta)]^{-1}\circ F(x,\theta)\| < (1-\alpha)\delta$$

从而，由(5·7)式和上式，当 $x\in B(\theta,r)$ 时，有

$$\|A(x,y)\| \leqslant \|A(x,y)-A(x,\theta)\| + \|A(x,\theta)\|$$
$$\leqslant \alpha\|y\| + \|A(x,\theta)\| < \alpha\delta + (1-\alpha)\delta = \delta$$

即对固定的 $x\in B(\theta,r)$，$A(x,y):\bar{B}(\theta,\delta)\to B(\theta,\delta)$. 由 Banach 不动点定理，$A(x,y)$ 在 $\bar{B}(\theta,\delta)$ 内有唯一不动点 $y=Tx$. 依命题 5·1，$Tx$ 还是连续的 此外，$\theta=T\theta$，$F(x,Tx)=\theta(x\in B(\theta,r))$. 倘若在 $\theta$ 邻近另有算子 $Px$ 满足 $F(x,Px)=\theta$，则由算子 $A(x,y)$ 之定义得

$$A(x,Px) = -[F'_y(\theta,\theta)]^{-1}\circ F(x,Px) + Px = Px$$

即 $Px$ 是 $A(x,\ y)$ 的不动点. 但不动点唯一，故 $Tx=Px$. 可见，$F(x,y)=\theta$ 的解 $y=Tx$ 是唯一的.

证毕

为证明隐函数的可微性定理需要下列引理，这条引理在线性算子扰动理论中有重要意义.

**引理 5·1** 设 $X$、$Y$ 均为实 Banach 空间，$G$ 为 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中具有有界逆的算子全体. 又设 $A\in G$ 且 $\|A-B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$，则 $B\in G$ 且

$$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|} \tag{5·8}$$

$$\|B^{-1}-A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2\|A-B\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|} \tag{5·9}$$

特别地，$G$ 是 $\mathscr{B}(X,\ Y)$ 中的开集且 $f(A)=A^{-1}$ 是 $G$ 上的连续映射

**证明** 显然，$A^{-1}B: X\to X$ 并且

$$\|I-A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A-B)\| \leqslant \|A^{-1}\|\|A-B\| < 1.$$

由此知 $A^{-1}B = I-(I-A^{-1}B)$ 在 $\mathscr{B}(X)$ 中具有有界逆算子且

$$\|(A^{-1}B)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|I-A^{-1}B\|} \leqslant \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|} \tag{5·10}$$

因 $B=A(A^{-1}B)$，故 $B\in G$ 且 $B^{-1}=(A^{-1}B)^{-1}A^{-1}$. 由 $\|B^{-1}\|\leqslant\|(A^{-1}B)^{-1}\|\|A^{-1}\|$及(5·10)式，便得(5·8). 注意到

$$B^{-1}-A^{-1}=(I-A^{-1}B)B^{-1}=A^{-1}(A-B)B^{-1}$$

知$\|B^{-1}-A^{-1}\|\leqslant\|A^{-1}\|\|A-B\|\|B^{-1}\|$，则由(5·8)可得(5·9).

最后，因满足$\|A-B\|<\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$之一切$B$，皆有 $B\in G$，故$G$是$\mathscr{B}(X,Y)$中之开集. 根据(5·9)，$f(A)=A^{-1}$ 在$G$上连续.

证毕

**定理 5·3** 除满足定理 5·2 的全部条件外，又设 $F'_x(x,y)$，$F'_y(x,y)$在 $U\times V$ 上连续. 则隐算子$T$在 $B(x_0,r)$ 上连续可微且

$$T'(x)=-[F'_y(x,Tx)]^{-1}F'_x(x,Tx) \tag{5·11}$$

**证明** 由定理 5·2，存在连续映射 $T: B(x_0,r)\to B(y_0,\delta)$，满足

$$F(x,Tx)=\theta \quad x\in B(x_0,r) \tag{5·12}$$

设 $x,x+h\in B(x_0,r)$，则 $T(x+h)\in B(y_0,\delta)$. 于是

$$F(x+h,T(x+h))=\theta \tag{5·13}$$

记 $t=T(x+h)-Tx$，由(5·12)、(5·13)和偏导算子的定义，有

$$\begin{aligned}\theta&=F(x+h,Tx+t)-F(x,Tx)\\&=F(x+h,Tx+t)-F(x,Tx+t)+F(x,Tx+t)\\&\quad -F(x,Tx)\\&=F'_x(x,Tx+t)h+F'_y(x,Tx)t+o(\|h\|)+o(\|t\|)\end{aligned}$$

因为 $F'_x(x,y)$和 $Tx$ 都连续，当$\|h\|\to0$ 时，$\|t\|\to0$，所以$F'_x(x,Tx+t)h=F'_x(x,Tx)h+o(\|h\|)$. 由此得

$$F'_x(x,Tx)h+F'_y(x,Tx)t=o(\|h\|)+o(\|t\|).$$

因而对任何固定的 $x\in B(x_0,r)$及任何 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得当$\|h\|<\eta$ 时

$$\|F'_x(x,Tx)h+F'_y(x,Tx)t\|\leqslant\varepsilon(\|h\|+\|t\|).$$

按引理5·1，$[F'_y(x,Tx)]^{-1}$存在且有界线性，故由上述不等式，有

$$\|t+[F'_y(x,Tx)]^{-1}F'_x(x,Tx)h\|\leqslant\varepsilon\|[F'_y(x,Tx)]^{-1}\|(\|h\|+\|t\|) \tag{5·14}$$

取 $\varepsilon$ 如此小，使得 $\varepsilon\|[F'_y(x,\ Tx)]^{-1}\|\leqslant\frac{1}{2}$，记 $M=2\|[F'_y(x,Tx)]^{-1}F'_x(x,Tx)\|+1$，则由(5·14)式得

$$\|t\|-\frac{M-1}{2}\|h\|\leqslant\frac{1}{2}(\|h\|+\|t\|)$$

即$\|t\|\leqslant M\|h\|$. 在(5·14)式中代入 $t=T(x+h)-Tx$，当$\|h\|<\eta$时，有

$$\begin{aligned}&\|T(x+h)-Tx+[F'_y(x,Tx)]^{-1}F'_x(x,Tx)h\|\\&\leqslant\varepsilon(M+1)\|F'_y(x,Tx)]^{-1}\|\cdot\|h\|\end{aligned}$$

可见，$T$在点$x$处$F$-可微分且(5·11)式成立. 由定理的假设及(5·11)式知$T'(x)$还是连续的.

证毕

## §6 Newton方法

在数值分析中常常涉及到各种方程的近似求解问题. 泛函分析有着高度的综合性，它可以将各种方程的近似解法做统一处理. 各类非线性算子方程的近似方法是非线性泛函分析的重要内容之一. 这里介绍的Newton方法就是一种近似方法.

在数学分析中，求方程$f(x)=0$的根有Newton迭代程序:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

如何把这种Newton方法推广到算子方程$Tx=0$的求解过程呢? 早在本世纪四十年代，L.V.Kantorovich用泛函分析观点把Newton方法移植到各类算子方程的求解过程，获得很大成功. 下列结果及其证法是属于Kantorovich的.

**定理6·1** 设$X$、$Y$均为实Banach空间，算子$T$: $B(x_0,r)\subset X\to Y$是$F$-可微分的，且满足

(i) $[T'(x_0)]^{-1}$是$Y$到$X$的有界线性算子，$\|[T'(x_0)]^{-1}Tx_0\|\leqslant\alpha$，$\|[T'(x_0)]^{-1}\|\leqslant\beta$；

(ii) $\|T'(x)-T'(y)\|\leqslant L\|x-y\|\quad x,y\in B(x_0,r)$；

(iii) $2L\alpha\beta<1, 2\alpha<r$，

则Newton迭代程序

$$x_{n+1}=x_n-[T'(x_n)]^{-1}Tx_n\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{6·1}$$

收敛于方程$Tx=\theta$的唯一解$x^*\in B(x_0,2\alpha)$且有

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}q^{2^n-1}\tag{6·2}$$

其中$q=2L\alpha\beta$.

**证明** 首先，我们利用归纳法证明迭代(6·1)可行，即诸$x_n\in B(x_0,r)$，$[T'(x_n)]^{-1}$存在且是有界线性的. 记

$$\alpha_n=\|x_{n+1}-x_n\|,\ \beta_n=\|[T'(x_n)]^{-1}\|,\ \gamma_n=L\alpha_n\beta_n$$

显然，当$n=0,1$时结论正确，并且$\alpha_0\leqslant\alpha$，$\gamma_0<\frac{1}{2}$. 假设当$0\leqslant n\leqslant k-1$时结论都成立，而且$\alpha_n\leqslant 2^{-n}\alpha$，$\gamma_n<\frac{1}{2}$，则从Lipschitz条件(ii)、(6·1)式、Taylor公式和Riemann积分的性质，

$$\begin{aligned}\alpha_k&\leqslant\beta_k\|Tx_k-(Tx_{k-1}+T'(x_{k-1})(x_k-x_{k-1}))\|\\&\leqslant\beta_k\alpha_{k-1}\int_0^1\|T'(x_{k-1}+t(x_k-x_{k-1}))-T'(x_{k-1})\|dt\\&\leqslant L\beta_k\alpha_{k-1}^2\int_0^1 t\,dt=\frac{L}{2}\beta_k\alpha_{k-1}^2\end{aligned}\tag{6·3}$$

因为$T'(x_k)=T'(x_{k-1})\{I+[T'(x_{k-1})]^{-1}(T'(x_k)-T'(x_{k-1}))\}$，且由假设$\gamma_{k-1}<\frac{1}{2}$，所以还有$\beta_k\leqslant\beta_{k-1}(1-\gamma_{k-1})^{-1}$. 从而$\alpha_k\leqslant\frac{L}{2}(1-\gamma_k)^{-1}\cdot\beta_{k-1}\alpha_{k-1}^2$. 于是有

$$\alpha_k \leqslant \frac{1}{2} \frac{\gamma_{k-1}}{1-\gamma_{k-1}} \alpha_{k-1}, \qquad \gamma_k \leqslant \frac{1}{2} \frac{\gamma_{k-1}^2}{(1-\gamma_{k-1})^2} \tag{6·4}$$

由此式及假设便知$\gamma_k < \frac{1}{2}$. 进而又有$\alpha_k \leqslant \frac{1}{2}\alpha_{k-1} \leqslant 2^{-k}\alpha$. 这样便得到

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}-x_0\| &\leqslant \|x_{k+1}-x_k\| + \|x_k - x_{k-1}\| + \cdots + \|x_1 - x_0\| \\ &\leqslant 2^{-k}\alpha + 2^{-(k-1)}\alpha + \cdots + \alpha \\ &\leqslant 2\alpha < r\end{aligned}$$

即 $x_{k+1} \in B(x_0, r)$. 再据引理 5·1 及

$$\|T'(x_{k+1}) - T'(x_k)\| \leqslant L\alpha_k \leqslant 2L\alpha < \frac{1}{\beta} \leqslant \frac{1}{[T'(x_0)]^{-1}}$$

又知$[T'(x_{k+1})]^{-1}$ 存在且是有界线性的. 由归纳原理便知迭代程序(6·1)可行.

其次,利用$\alpha_n \leqslant 2^{-n}\alpha (n \in \mathcal{N})$,易知$\{x_n\}$是$\bar{B}(x_0, 2\alpha)$ 中的 Cauchy 序列. 设$x_n \to x^* \in \bar{B}(x_0, 2\alpha)$,由(6·1)式,$Tx^* = \theta$. 另外,若还有$\bar{x} \in \bar{B}(x_0, 2\alpha)$使得 $T\bar{x} = \theta$,则

$$\begin{aligned}\|x^* - \bar{x}\| &\leqslant \beta \|T\bar{x} - Tx^* - T'(x_0)(\bar{x} - x^*)\| \\ &\leqslant \beta L \|x^* - \bar{x}\| \int_0^1 \|\bar{x} + t(x - \bar{x}) - x_0\| dt \\ &\leqslant 2L\alpha\beta \|x^* - \bar{x}\|\end{aligned}$$

由(iii),$\bar{x} = x^*$. 即 $x^*$ 还是方程 $Tx = \theta$ 的唯一解.

最后,为得到(6·2)式,记$\delta_n = \gamma_n(1-\gamma_n)^{-1}$,然后从(6·4)及$\gamma_n < \frac{1}{2}$推得 $\delta_n \leqslant \delta_{n-1}^2$. 因而当 $n \geqslant 0$ 时,$\delta_n \leqslant \delta_0^{2^n}$. 所以由(6·4),有

$$\alpha_n \leqslant \frac{1}{2}\delta_0^{2^{n-1}} \alpha_{n-1} \leqslant 2^{-n}\delta_0^{2^n - 1}\alpha_0 \leqslant 2^{-n} q^{2^n - 1} \alpha_0$$

因此

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i \leqslant 2 \cdot 2^{-n} q^{2^n - 1}\alpha = \frac{\alpha}{2^{n-1}} q^{2^n - 1}$$

证毕

**例 1** 用 $C^2[0,1]$ 表示 $[0,1]$ 上二阶连续可微函数全体. 对 $f\in C^2[0,1]$，规定

$$\|f\|=\sum_{j=0}^{2}\sup_{x\in[0,1]}|f^{(j)}(x)|$$

不难验证 $C^2[0,1]$ 是 Banach 空间.

考虑在空间 $C^2[0,1]$ 内近似求解二阶常微分方程两点边值问题

$$\begin{cases}f''(x)-[f(x)]^2=g(x)\\ f(0)=f(1)=0\end{cases}\tag{6·5}$$

其中 $g(x)$ 是已知的连续函数. 在(6·5)中令 $u(x)=-f''(x)$，则

$$f(x)=\int_0^1 k(x,y)u(y)\,dy\tag{6·6}$$

其中

$$k(x,y)=\begin{cases}x(1-y),\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ y(1-x),\ 0\leqslant y<x\leqslant 1\end{cases}\tag{6·7}$$

是算子 $Lf=-f''$ 在边界条件 $f(0)=f(1)=0$ 的 Green 函数. 将(6·7)式代入到(6·6)式得

$$f(x)=(1-x)\int_0^x yu(y)\,dy+x\int_x^1(1-y)u(y)\,dy.$$

由此知，$f(0)=f(1)=0$，并逐次微分之，得

$$f'(x)=-\int_0^x yu(y)\,dy+\int_x^1(1-y)u(y)\,dy$$

$$-f''(x)=xu(x)+(1-x)u(x)=u(x)\tag{6·8}$$

若 $f(x)$ 是(6·5)的解，则有

$$\int_0^1 k(x,y)u(y)\,dy=-\int_0^1 k(x,y)[(f(y))^2+g(y)]\,dy$$

从(6·6)知，$f(x)$ 是非线性 Hammerstein 型积分方程

$$f(x)=-\int_0^1 k(x,y)[(f(x))^2+g(y)]\,dy\tag{6·9}$$

的解. 反之,设$f(x)$是方程(6·9)在$C^2[0,1]$内的解. 用$-[(f(x))^2+g(y)]$来代替(6·6)式积分号下的$u(x)$,由(6·6)到(6·8)所推导的结果便知,$f(x)$也是(6·5)的解. 因此问题(6·5)等价于求解方程(6·9). 记

$$Tf(x)=f(x)+\int_0^1 k(x,y)\{[f(y)]^2+g(y)\}dy$$

则求解方程(6·9)就等价于求$Tf=0$的解. 现在我们用Newton法求解这方程. 取初始值$f_0=0$. §2 例3已证明,在空间$C[0,1]$内$T$的$F$-微分为

$$T'(f)h(x)=h(x)+2\int_0^1 k(x,y)f(y)h(y)dy$$

因为$T'(f_0)=I$,故$[T'(f_0)]^{-1}=I$,为利用定理6·1只要取$\beta=1$. 考虑线性积分算子

$$Kh(x)=\int_0^1 k(x,y)h(y)dy$$

容易验算$\|K\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}\int_0^1|k(x,y)|dy=\frac{1}{8}$. 故可选$\alpha=\|g\|/8$. 又

$$\|T'(f_1)h-T'(f_2)h\|\leqslant 2\|h\|\|K\|\|f_1-f_2\|\leqslant\frac{\|h\|}{4}\|f_1-f_2\|$$

由此得

$$\|T'(f_1)-T'(f_2)\|\leqslant\frac{1}{4}\|f'_1-f'_2\|$$

故可取$L=\frac{1}{4}$. 因而$\alpha\beta L=\|g\|/32$,可见,只需设$\|g\|<16$,Newton迭代程序

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)-[T'(f_n)]^{-1}T(f_n(x))\qquad n=0,1,2\cdots$$

在$C[0,1]$中必收敛于(6·9)的解$f^*(x)$. 此外,$\|f^*\|\leqslant 2\alpha=\|g\|/4$.

## 习　题

1. 设算子 $T$: $l^2\to l^2$ 定义如下:

$$T(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(x_1,\ x_2^2,x_3^3,\cdots)$$

当 $(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^2$

试证对任何 $r>1$, $T$ 在 $\bar{B}(\theta,r)$ 上连续,但无界.

2. 设 $X$ 为实线性赋范空间,算子 $T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to X^*$, 其中 $\mathscr{D}(T)$ 是凸集。试证 $T$ 在 $x_0\in\mathscr{D}(T)$ 是半连续的当且仅当对任何 $h\in\mathscr{D}(T)$ 及任何 $e\in X$, $(T(x_0+th),e)$ 是 $[0,1]$ 上 $t$ 的连续函数.

3. 设 $X$ 为自反 Banach 空间,算子 $T$: $\bar{B}(x_0,r)\to X$ 强连续. 试证 $T$ 在 $\bar{B}(x_0,r)$ 上一致连续.

4. 试证空间 $C[a,b]$ 上的范数

$$\varphi(x)=\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$$

在 $x$ 处是 $G$-可微分的当且仅当恰有一 $t_0\in[a,b]$, 使得 $|x(t_0)|=\|x\|$.

5. 设 $X,Y$ 皆为实 Banach 空间, $G$ 是 $X$ 中的开集. 又设 $f$: $[a,\ b]\times G\to Y$ 连续且 $F$-偏导映射 $D_xf(t,x)$ 连续. 记

$$g(x)=\int_a^b f(t,x)dt$$

试证 $g$ 在 $G$ 上 $F$-可微且

$$Dg(x)=\int_a^b D_xf(t,x)dt$$

6. 设 $X$ 为 Banach 空间, $T$ 在 $X$ 上连续 $F$-可微且对任何 $t\in E^1$ 和 $x\in X$, 有 $T(tx)=tTx$. 试证 $T$ 是线性的. 实际上, $Tx=T'(\theta)x$.

7. 设 $X=\{u|u\in C[a,b],[a,b]\subset E^1,u(a)=u(b)=0\}$, $K$: $[a,b]\times[a,b]\to E^1$ 连续,且为对称的 $(K(s,t)=K(t,s))$, 它定义积分算子

$$(Ku)(s)=u(s)\int_a^b K(s,t)u(t)dt,\ a\leqslant s\leqslant b,\ u\in X$$

证明 $(Ku)(s)$ 在 $X$ 上 $F$-可微分,并算出它的 $F$-微分。

8. 设 $X=\{u|u$ 在 $[0,1]$ 上连续可微且 $u(0)=0,u(1)=0\}$. 试讨论泛函

$$\varphi(x)=\int_0^1((x(t))^3+(x'(t)\ )^4)dt,\quad x\in X$$

高阶微分的存在性.

9. 设 $X,Y$ 是Banach 空间，$T:X\to Y$ 在 $X$ 上是紧算子(即 $T$ 连续且映任何 $X$ 的有界子集为 $Y$ 的相对紧集，见第三章定义5.1)．证明：如果 $T$ 在 $x_0$ 处 $F$-可微分，则 $F$-导算子 $DT(x_0)$ 也是从 $X$ 到 $Y$ 的紧算子.

10. 设 $X$ 为实 Banach 空间，算子 $T:\bar{B}(\theta,r)\to X$ 满足

(i) $\|Tx-Ty\|\leqq L\|x-y\|\ (0<L<1)$;

(ii) $\|T\theta\|\leqq r(1-L)$.

证明存在唯一一点 $x\in\bar{B}(\theta,r)$，使得 $Tx=x$.

11. 设 $X,Y$ 和 $Z$ 皆为实线性赋范空间，$U$ 是 $X\times Y$ 中的开集，算子 $T:U\to Z$ 在 $(x_0,y_0)\ (\in U)$ 处 $F$-可微分．证明 $T$ 在 $(x_0,y_0)$ 处对 $x$ 和 $y$ 的偏导算子都存在且

$$DT(x_0,y_0)(x,y)=D_xT(x_0,y_0)x+D_yT(x_0,y_0)y$$

12. 试证 Taylor 公式也可写成下列形式

$$T(x_0+h)=Tx_0+DT(x_0)h+\cdots+\frac{1}{n!}D^nT(x_0)h^n+R(h)$$

其中余项有估计

$$\|R(h)\|\leqslant\sup_{0<t<1}\frac{1}{n!}\|D^nT(x_0+th)-D^nT(x_0)\|\cdot\|h\|^n$$

和

$$R(h)=o(\|h\|^n)$$

# 第二章　压缩原理与非扩展算子

不动点理论已经获得大量结果，它在微分方程、数值分析、拓扑学、数理经济学、对策论、最优控制和泛函分析等领域有广泛应用.

本章主要讲述两类算子的不动点理论，一类是 Banach 压缩算子的各种推广，另一类是非扩展算子. 另外一些不动点定理，如 Brouwer 不动点定理和 Schauder 不动点定理，我们放在下一章去讨论.

## §1　压缩算子的一些推广

**定义 1·1**　设 $X$ 是距离空间，$\Omega\subset X$，$\Omega\neq\varnothing$. 算子 $T$：$\Omega\to X$ 称为(在 $\Omega$ 上)是 Lipschitz 的，是指存在常数 $M>0$，使得

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant M\rho(x,y)\quad 当\ x,y\in\Omega$$

满足此不等式的最小 $M$，称为算子 $T$ 的 Lipschitz 常数，记作 $L(T)$. 当 $L(T)<1$ 时，称 $T$ 是 Banach 压缩的，简称为压缩的，此时称 $L(T)$ 为压缩常数. 当 $L(T)=1$ 时，称 $T$ 是非扩展的(non-expansive). 若

$$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)\quad 当\ x,y\in\Omega,\ x\neq y$$

则称 $T$ 是严格非扩展的.

由上述定义看出，严格非扩展算子是非扩展的，它们都是 Lipschitz 算子. 这类算子是连续的. 如果严格非扩展算子有不动点，则不动点唯一. 但是，严格非扩展算子不一定有不动点. 例

如，$Tx=\ln(1+e^x)$，$T$：$E^1\to E^1$．易证它是严格非扩展的，但它没有不动点．

### 1·1 线性算子和压缩算子

设 $X$ 是 Banach 空间，$\mathscr{B}(X)$ 表示从 $X$ 到 $X$ 的有界线性算子空间，设 $T\in\mathscr{B}(X)$．由线性泛函分析知道，$T$ 的谱半径 $r_T$ 必存在，且有表达式

$$r_T=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{1·1}$$

下列结果在数值分析中是很有用的．

**定理 1·1** 设 $T\in\mathscr{B}(X)$，且任给 $\varepsilon>0$．则可把空间 $(X,\|\cdot\|)$ 改赋一个等价范数 $\|\cdot\|^*$，使得

$$\|T\|^*\leqslant r_T+\varepsilon \tag{1·2}$$

式中 $\|T\|^*$ 是 $T$ 相应于 $(X,\|\cdot\|^*)$ 的范数．

**证明** 对给定的 $\varepsilon>0$，据(1·1)式，存在 $N(\varepsilon)\in\mathscr{N}$，使得

$$\|T^n\|\leqslant(r_T+\varepsilon)^n,\ n\geqslant N(\varepsilon)$$

对 $x\in X$，现在规定

$$\|x\|^*=(r_T+\varepsilon)^{N-1}\|x\|+(r_T+\varepsilon)^{N-2}\|Tx\|+\cdots+\|T^{N-1}x\| \tag{1·3}$$

显然 $\|\cdot\|^*$ 是范数．由此我们得

$$(r_T+\varepsilon)^{N-1}\|x\|\leqslant\|x\|^*\leqslant(r_T+\varepsilon)^{N-1}\|x\|+\cdots+\|T^{N-1}\|\|x\|=k\|x\|$$

可见，$\|\cdot\|^*$ 与 $\|\cdot\|$ 是等价的．

由(1·3)式

$$\begin{aligned}\|Tx\|^*&=(r_T+\varepsilon)^{N-1}\|Tx\|+(r_T+\varepsilon)^{N-2}\|T^2x\|+\cdots+\|T^Nx\|\\&\leqslant(r_T+\varepsilon)[(r_T+\varepsilon)^{N-2}\|Tx\|+(r_T+\varepsilon)^{N-3}\|T^2x\|\\&\quad+\cdots+(r_T+\varepsilon)\|T^{N-1}x\|+(r_T+\varepsilon)^{N-1}\|x\|]\\&=(r_T+\varepsilon)\|x\|^*\end{aligned}$$

所以(1·2)式成立.　　　　　　　　　　　　　　　　　　证毕

**推论**　若 $T\in\mathscr{B}(X)$ 和 $r_T<1$，则存在 $X$ 上的等价范数 $\|\cdot\|^*$，使得 $T$ 相应于 $\|\cdot\|^*$ 是压缩的.

## 1·2　Caristi 不动点定理

下面我们利用在距离空间引入半序和完备性概念，导出著名的 Caristi 不动点定理.

设 $X$ 是距离空间，$\varphi$: $X\to E^1$ 是 $X$ 上的实值泛函. 在 $X$ 内引入序关系"$\leqslant$"如下：对 $x,y\in X$，

$$x\leqslant y \text{ 当且仅当 } \rho(x,y)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y)$$

容易验证"$\leqslant$"是 $X$ 内的半序. 用 $X_\varphi$ 表示这个半序空间 $X$.

**定义 1·2**　设 $X$ 是距离空间. 我们称 $\varphi$: $\mathscr{D}(\varphi)\subset X\to E^1$ 在 $x_0\in\mathscr{D}(T)$ 是下半连续的，是指对任何 $x_n\to x_0$，$x_n\in\mathscr{D}(\varphi)$，都有 $\varphi(x_0)\leqslant\underline{\lim_n}\varphi(x_n)$.

容易证明上述定义等价于：对任何 $x_n\to x_0$，$\{x_n\}_{n=0}^\infty\subset\mathscr{D}(\varphi)$ 且 $\varphi(x_n)\to\beta$，必有 $\varphi(x_0)\leqslant\beta$.

**定理 1·2**　设 $X$ 是完备距离空间，$\varphi$: $X\to E^1$ 是下方有界的下半连续泛函. 则对任何给定的 $x_0\in X_\varphi$，至少存在 $X_\varphi$ 的一个极大元 $x^*$，使得 $x_0\leqslant x^*$.

**证明**　对任何 $x\in X_\varphi$，记 $C(x)=\{y|y\geqslant x\}$. 显然 $C(x)=\{y|\varphi(y)+\rho(x,y)\leqslant\varphi(x)\}$. 因为 $\varphi(\cdot)+\rho(x,\cdot)$ 是下半连续的，所以每一 $C(x)$ 都是 $X_\varphi$ 中的闭集.

设给定 $x_0\in X_\varphi$. 用归纳法作点列 $x_0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots$. 首先选 $x_1\in C(x_0)$，使得

$$\varphi(x_1)\leqslant 1+\inf_{y\in C(x_0)}\varphi(y).$$

假定已经选出 $x_0,x_1,\cdots x_{n-1}$，然后选 $x_n\in C(x_{n-1})$，使得

$$\varphi(x_n) \leqslant \frac{1}{n} + \inf_{y \in C(x_{n-1})} \varphi(y) \tag{1·4}$$

这样，得到下降的闭集列 $C(x_0) \supset C(x_1) \supset \cdots$. 现在计算 $C(x_n)$ 的直径 $\delta(C(x_n))$ 如下：对 $n \geqslant 1$，设 $z \in C(x_n) \subset C(x_{n-1})$，则由(1·4)式，有

$$\varphi(z) \geqslant \inf_{y \in C(x_{n-1})} \varphi(y) \geqslant \varphi(x_n) - \frac{1}{n},$$

并且因为 $x_n \leqslant z$，得

$$\rho(x_n, z) \leqslant \varphi(x_n) - \varphi(z) \leqslant \frac{1}{n}$$

由此推出 $\delta(C(x_n)) \leqslant \frac{2}{n}$, $\delta(C(x_n)) \to 0 (n \to \infty)$. 由 Cantor定理，存在唯一一点 $x^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty} C(x_n)$. 因为 $x^* \in C(x_0)$，所以 $x_0 \leqslant x^*$.

最后来证明 $x^*$ 是 $X_\varphi$ 的极大元. 假若有 $\bar{x} \in X_\varphi$, $\bar{x} \geqslant x^*$，则对任何非负整数 $n$, $\bar{x} \geqslant x^* \geqslant x_n$. 于是，$\bar{x} \in \bigcap_{n=0}^{\infty} C(x_n)$，这只能是 $\bar{x} = x^*$. 可见，$x^*$ 是 $X_\varphi$ 中的极大元.

证毕

**定理 1·3**(Caristi, J., 1976)　设 $X$ 为完备距离空间，算子 $T$: $X \to X$. 假定存在下方有界的下半连续泛函 $\varphi: X \to E^1$ 满足

$$\rho(x, Tx) \leqslant \varphi(x) - \varphi(Tx), \forall x \in X \tag{1·5}$$

则 $T$ 至少有一不动点.

**证明**　考虑半序集 $X_\varphi$，按定理 1·2，$X_\varphi$ 有极大元 $x_0$. 由(1·5)式得

$$\rho(x_0, Tx_0) \leqslant \varphi(x_0) - \varphi(Tx_0)$$

这意味着 $x_0 \leqslant Tx_0$. 由于 $x_0$ 是 $X_\varphi$ 内极大元，所以 $x_0 = Tx_0$.

证毕

我们指出，Banach 不动点定理是定理 1·3 的推论. 事实上，如果 $\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)\ (\alpha<1)$，则有 $\rho(Tx,T^2x)\leqslant\alpha\rho(x,Tx)$. 由此得 $\rho(x,Tx)-\alpha\rho(x,Tx)\leqslant\rho(x,Tx)-\rho(Tx,T^2x)$. 取泛函 $\varphi(x)=(1-\alpha)^{-1}\rho(x,Tx)$. 这样，容易看出定理 1·3 的全部条件都是满足的.

值得注意的是，定理 1·3 并不要求算子 $T$ 是连续的. 近年来，已经证明了定理 1·3 等价于所谓 Ekeland 变分原理. 它们都是近十年来非线性泛函分析获得的重要成果. Ekeland 变分原理在最优化、控制论、数学规划、微分方程. Banach 空间几何和大范围分析各领域得到广泛应用.

## §2 压缩原理在积分方程和微分方程上的应用

由于 Banach 压缩映射原理的压缩条件容易被验证，所以它应用广泛. 我们在第一章 § 5 曾给出这一原理在反函数和隐函数存在定理上的应用. 本节给出它在第二类 Volterra 积分方程和常微分方程初值问题上的应用.

**定理2·1** 设函数 $k:[0,T]\times[0,T]\times E^1\to E^1$ 并满足 Lipschitz 条件

$$|k(t,s,x)-k(t,s,y)|\leqslant L|x-y|$$

$$\text{当}(s,t)\in[0,T]\times[0,T],\ x,y\in E^1$$

则对任意 $v\in C[0,T]$，第二类 Volterra 积分方程

$$u(t)=v(t)+\int_0^t k(t,s,u(s))\,ds\quad(0\leqslant t\leqslant T)\qquad(2\cdot1)$$

有唯一解 $u\in C[0,T]$. 此外，对任选 $u_0\in C[0,T]$，迭代

$$u_{n+1}(t)=v(t)+\int_0^t k(t,s,u_n(s))\,ds\qquad(2\cdot2)$$

所得序列 $\{u_n(t)\}$ 在 $[0,T]$ 上一致收敛于解 $u(t)$.

**证明** 我们把连续函数空间$C[0,T]$改赋范数

$$\|g\|_1=\max_{0\leq t\leq T}e^{-Lt}|g(t)|,\text{当 } g\in C[0,T]$$

以$\|\cdot\|_1$为范数的连续函数空间记作$C_1[0, T]$. 它仍是 Banach 空间. 本来对$g\in C[0,T]$, $\|g\|=\max\limits_{0\leq t\leq T}|g(t)|$, 现在

$$e^{-LT}\|g\|\leq\|g\|_1\leq\|g\|,$$

故两范数等价. 考虑 Volterra 积分算子

$$(Ag)(t)=v(t)+\int_0^t k(t,s,g(s))ds$$

易知, $A: C_1[0,T]\to C_1[0, T]$. 显然方程(2·1)有唯一解当且仅当$A$在$C_1[0,T]$内有唯一不动点. 因为

$$\begin{aligned}\|Ag-Ah\|_1&\leq L\max_{0\leq t\leq T}e^{-Lt}\int_0^t|g(s)-h(s)|ds\\&=L\max_{0\leq t\leq T}e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}e^{-Ls}|g(s)-h(s)|ds\\&\leq L\|g-h\|_1\max_{0\leq t\leq T}e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}ds\\&=L\|g-h\|_1\max_{0\leq t\leq T}e^{-Lt}\frac{e^{Lt}-1}{L}\\&\leq(1-e^{-LT})\|g-h\|_1,\text{当 } g,h\in C_1[0,T]\end{aligned}$$

而$1-e^{-LT}<1$, 故$A$是压缩的. 由 Banach 不动点定理, 存在$A$的唯一不动点$u$, 且对任取$u_0\in C_1[0,T]$, $A^n u_0\to u$. 因为$C_1[0, T]$与$C[0,T]$的范数等价, 所以在$C[0,T]$中也有$A^n u_0\to u$. 这就证明了由(2·2)式所确定的迭代函数列$\{u_n(t)\}$在$[0,T]$上一致收敛于(2·1)的解$u(t)$.

证毕

如果象通常那样, 在范数是$\|g\|=\sup|g(t)|$的连续函数空间内求解, 那么为了确保算子$A: C[0,\lambda]\to C[0,\lambda]$是压缩的, 只能取

$\lambda<\min\left\{T,\frac{1}{L}\right\}$. 因此，当 $T>\frac{1}{L}$时，只能在子区间$[0,\lambda]$上得到方程(2·1)的解. 我们采用新范数$\|\cdot\|_1$的好处是保证在整个区间$[0,T]$上有解.

**定理 2·2** 设 $f:[0,T]\times E^1\to E^1$ 连续且满足 Lipschitz 条件

$$|f(s,x)-f(s,y)|\leqslant L|x-y|, \text{当 } s\in[0,T], x,y\in E^1$$

则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du}{ds}=f(s,u)\\ u(0)=0\end{cases} \tag{2·3}$$

在整个区间$[0,T]$上恰有一解.

**证明** 在方程(2·1)中令 $k(t,s,u)=f(s,u)$, $v(t)=0$, 则方程(2·1)变成积分方程

$$u(t)=\int_0^t f(s,u(s))\,ds$$

而由第一章§3最后的结论可知它等价于初值问题 (2·3). 于是定理(2·2)的结论可由定理(2·1)推出.

## §3 一致凸赋范空间

本节要讨论几种特殊类型的线性赋范空间，特别是一致凸赋范空间. 这些空间的几何特性在不动点理论和单调算子理论中是经常要用到的.

设$X$是$E^3$，$S$是单位球面. 容易明白，$X$上的任何线段至多与$S$交于两点. 但并不是任何线性赋范空间中的单位球面也都有此性质，因此，有如下概念.

**定义3·1** 设$X$是线性赋范空间，$S$是$X$中的单位球面. 若对任何 $x,y\in S$, $x\neq y$, $t\in(0,1)$，总有$\|tx+(1-t)y\|<1$，则称$X$是严

格凸赋范空间.

**定义3·2** 设$X$是线性赋范空间. 若$u$、$v\in X$, $u\neq\theta$, $v\neq\theta$且$\|u+v\|=\|u\|+\|v\|$时, 必存在$\alpha>0$, 使得$u=\alpha v$, 则称$X$是严格赋范空间.

严格赋范空间的特征是: 两向量之和的长度等于长度之和当且仅当两向量共线.

**定理3·1** 设$X$是实线性赋范空间, 则下列说法等价:

(i) $X$是严格凸赋范空间;

(ii) 对任何$f\in X^*$, $f$在$S$上最多于一点达到最大值;

(iii) $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|<1 \quad (x, y\in S, x\neq y)$;

(iv) $X$是严格赋范空间.

**证明**

(i)⇒(ii) 设$x, y\in S, f(x)=f(y)=\|f\|$, 则对一切$t\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}\|f\|&=(1-t)f(x)+tf(y)=f((1-t)x+ty)\\&\leqslant\|f\|\|(1-t)x+ty\|\end{aligned}$$

所以$\|(1-t)x+ty\|\geqslant1$. 由$X$的严格凸性, $x=y$, 即$f$在$S$上至多于一点达到最大值.

(ii)⇒(iii) 若存在$x$, $y\in S, x\neq y$, $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|=1$, 则由Hahn-Banach定理, 存在$f\in X^*$, $\|f\|=1$且$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|=1$ 所以$f(x)+f(y)=2$.

又因$f(x)\leqslant1$, $f(y)\leqslant1$, 所以$f(x)=f(y)=1$. 因此, 必有$x=y$, 这是矛盾的.

(iii)⇒(iv) 设$u$, $v\in X$, $\|u+v\|=\|u\|+\|v\|$. 不妨假定$0<\|u\|\leqslant\|v\|$. 于是

$$
\begin{aligned}
2 &\geqslant \left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\| \\
&\geqslant \left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|u\|} \right\| - \left\| \frac{v}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|u\|}\|u+v\| - \frac{(\|v\| - \|u\|)\|v\|}{\|u\|\|v\|} \\
&= \frac{1}{\|u\|}(\|u\| + \|v\|) - \frac{1}{\|u\|}(\|v\| - \|u\|) = 2
\end{aligned}
$$

由此得

$$
\left\| \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|} \right\| = 2.
$$

因为(iii)成立，故$\dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{v}{\|v\|}$，即(iv)成立.

(iv)⇒(i) 倘若(i)不成立，则有$x, y \in S$, $x \neq y$, $t_0 \in (0,1)$满足$\|t_0 x + (1-t_0)y\| = 1$. 从$\|x\| = \|y\| = 1$ 推得 $1 = t_0\|x\| + (1-t_0)\cdot\|y\| = \|t_0 x\| + \|(1-t_0)y\|$. 这样，依(iv)，存在$\alpha > 0$，满足$t_0 x = \alpha(1-t_0)y$. 再从$\|x\| = \|y\| = 1$，得$t_0 = \alpha(1-t_0)$. 于是$x = y$，矛盾，故(i)成立.

证毕

**例1** 设$R^n$是$n$维向量空间，对$x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$规定$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. 容易说明$(R^n, \|\cdot\|)$不是严格凸赋范空间.

**定义3·3** 设$X$是线性赋范空间. 若对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得当$x, y \in \bar{B}(\theta, 1)$且$\|x - y\| \geqslant \varepsilon$时，有

$$
\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta
$$

则称$X$是一致凸赋范空间.

从定义直接看出，一致凸赋范空间必为严格凸赋范空间.

**定理3·2** 设$X$是线性赋范空间. $X$是一致凸赋范空间的充

要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对任何 $\alpha\in(0,1)$，当 $x,y\in X$，$\|x-y\|\geqslant\varepsilon\max\{\|x\|,\|y\|\}$ 时，有

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|\leqslant\max\{\|x\|,\|y\|\}(1-2\delta\min\{\alpha,1-\alpha\})$$

**证明** 充分性显然.

必要性：若 $\|x\|=\|y\|=0$，则结论成立. 设 $c=\max\{\|x\|,\|y\|\}>0$，$x'=\frac{1}{c}x$，$y'=\frac{1}{c}y$，则有 $x',y'\in\bar{B}(\theta,1)$ 且 $\|x'-y'\|\geqslant\varepsilon$. 不妨设 $1-\alpha=\min\{\alpha,1-\alpha\}$，则

$$\|\alpha x'+(1-\alpha)y'\|=\|(1-\alpha)x'+(1-\alpha)y'+(2\alpha-1)x'\|$$
$$\leqslant(1-\alpha)\|x'+y'\|+(2\alpha-1)\|x'\|\leqslant2(1-\alpha)(1-\delta)+(2\alpha-1)$$
$$=1-2\delta(1-\alpha)=1-2\delta\min\{\alpha,1-\alpha\}$$

所以，$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|\leqslant c(1-2\delta\min\{\alpha,1-\alpha\})$，即

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|\leqslant\max\{\|x\|,\|y\|\}(1-2\delta\min\{\alpha,1-\alpha\})$$

**证毕**

**定理3·3** 内积空间是一致凸赋范空间.

**证明** 设 $H$ 是内积空间，$x,y\in\bar{B}(\theta,1)$ 且有 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon>0$. 据平行四边形法则，

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\leqslant4$$

所以 $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2\leqslant1-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\leqslant1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$. 令 $\delta=1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则 $\delta>0$ 且 $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leqslant1-\delta$.

**证毕**

由定理 3·3 知，Hilbert 空间是一致凸 Banach 空间. 1938年，Milman 证明了一致凸 Banach 空间是自反 Banach 空间. 可见，一致凸 Banach 空间是介于 Hilbert 空间与自反 Banach 空间之间的一种空间. J. A. Clarkson 在 1936 年引进了一致凸赋范空间，并证明了 $L^p$、$l^p(1<p<\infty)$ 皆为一致凸 Banach 空间.

## §4 非扩展算子

在本章§1曾引入一类非扩展算子，它是Lipschitz常数为1的Lipschitz算子. 这类算子的研究与增生算子、单调算子、非线性半群和非线性发展方程周期解等领域有密切关系.

**定理4·1** 设$\Omega$是实Banach空间的非空有界闭凸集，$T:\Omega\to\Omega$是非扩展算子. 则存在点列$\{x_k\}\subset\Omega$使得$x_k-Tx_k\to 0(k\to\infty)$.

**证明** 记$\lambda_k=(1-k^{-1})$. 任取$x_0\in\Omega$. 定义算子

$$T_kx=(1-\lambda_k)x_0+\lambda_kT_x.$$

因为$\Omega$是凸集，故$T_k:\Omega\to\Omega$. 由于$T$是非扩展的，故对任何$x$，$y\in\Omega$，有

$$\|T_kx-T_ky\|=\lambda_k\|T_x-T_y\|\leqslant\lambda_k\|x-y\|$$

这说明对每一$k\in\mathscr{N}$，算子$T_k$是压缩的. 按Banach不动点定理，存在$x_k\in\Omega$满足$T_kx_k=x_k$. 因而对任何$k\in\mathscr{N}$，有

$$\begin{aligned}x_k-Tx_k&=(x_k-T_kx_k)+(T_kx_k-Tx_k)\\&=(1-\lambda_k)(x_0-Tx_k).\end{aligned}$$

用$\delta(\Omega)$表示$\Omega$的直径，于是，由上式当$k\to\infty$时，就有

$$\|x_k-Tx_k\|\leqslant(1-\lambda_k)\delta(\Omega)=k^{-1}\delta(\Omega)\to 0$$

证毕

记$\mathrm{fix}(T)=\{x\,|\,x\in\mathscr{D}(T),\ Tx=x\}$，称作$T$的不动点集. 对于一个算子$T$，$\mathrm{fix}(T)$可能是空集，亦可能不是单点集. 以下我们来考虑非扩展算子的$\mathrm{fix}(T)$的结构.

**定理4·2** 设$X$是严格赋范空间，$\Omega\subset X$是凸集，$T:\Omega\to X$是非扩展的，则$\mathrm{fix}(T)$是凸集且是关于$\Omega$的相对闭集.

**证明** 设$\{x_n\}\subset\mathrm{fix}(T)$且$x_n\to x_0\in\Omega$，则$Tx_n\to x_0$. 因$T$连续，得$Tx_n\to Tx_0$，故$Tx_0=x_0$，即$x_0\in\mathrm{fix}(T)$. 因此，$\mathrm{fix}(T)$关于$\Omega$相对闭.

设 $x_1, x_2 \in \mathrm{fix}(T)$ 且 $x_1 \neq x_2$，记 $x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$，其中$\alpha \in (0, 1)$，由 $\mathrm{fix}(T) \subset \Omega$ 及$\Omega$的凸性知，$x_\alpha \in \Omega$. 因为

$$\|x_1 - Tx_\alpha\| = \|Tx_1 - Tx_\alpha\| \leqslant \|x_1 - x_\alpha\| = (1-\alpha)\|x_1 - x_2\| \quad (4\cdot1)$$

$$\|x_2 - Tx_\alpha\| = \|Tx_2 - Tx_\alpha\| \leqslant \|x_2 - x_\alpha\| = \alpha\|x_1 - x_2\| \quad (4\cdot2)$$

所以，$\|x_1 - Tx_\alpha\| + \|x_2 - Tx_\alpha\| = \|x_1 - x_2\|$. 由于$X$是严格赋范的，故存在 $\lambda > 0$，使得 $x_1 - Tx_\alpha = \lambda(Tx_\alpha - x_2)$. 经整理，有

$$Tx_\alpha = (1-\mu)x_1 + \mu x_2$$

其中 $\mu = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$. 依(4·1)式，$\mu \leqslant 1-\alpha$；依(4·2)式，$1-\mu \leqslant \alpha$. 从而 $\mu = 1-\alpha$. 故 $Tx_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x_\alpha$，即 $x_\alpha \in \mathrm{fix}(T)$. 因此，$\mathrm{fix}(T)$是凸集.

证毕

**定理 4·3** 设$X$是一致凸 Banach 空间，$\Omega$是$X$的有界凸子集，$T: \Omega \to X$非扩展. 则对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\xi(\varepsilon) > 0$，使得取$\Omega$内满足

$$\|Tx_0 - x_0\| \leqslant \xi(\varepsilon), \quad \|Tx_1 - x_1\| \leqslant \xi(\varepsilon)$$

的任何 $x_0, x_1$，对连结 $x_0$ 与 $x_1$ 的线段上的任何 $x$，都有

$$\|Tx - x\| \leqslant \varepsilon.$$

**证明** 连结 $x_0$ 与 $x_1$ 的线段是 $x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. 当$\|x_1 - x_0\| < \varepsilon/3$ 时，对这线段上的每一 $x$，当然有$\|x - x_0\| < \varepsilon/3$. 因此，我们只需取 $\xi(\varepsilon) < \varepsilon/3$，就有

$$\begin{aligned}\|Tx - x\| &\leqslant \|Tx - Tx_0\| + \|Tx_0 - x_0\| + \|x_0 - x\| \\ &\leqslant 2\|x - x_0\| + \xi(\varepsilon) < \varepsilon \end{aligned} \quad (4\cdot3)$$

所以，我们只要考虑情形$\|x_1 - x_0\| \geqslant \varepsilon/3$ 就可以了. 记 $\delta$ 是$\Omega$的直径，则当 $\lambda < \dfrac{\varepsilon}{3\delta}$时，对这线段上的 $x$，$\|x - x_0\| = \lambda\|x_1 - x_0\| < \varepsilon/3$. 据此，类似地做(4·3)式的推导，也有$\|Tx - x\| < \varepsilon$. 这样，并不需要考

虑$[0,1]$中的一切$\lambda$，而是仅需考虑 $\lambda \geqslant \frac{\varepsilon}{3\delta}$的情形。还要指出的是，当 $\lambda > 1-\frac{\varepsilon}{3\delta}$时，也有

$$\|x-x_1\| = (1-\lambda)\|x_1-x_0\| < \varepsilon/3$$

所以只要取 $\xi(\varepsilon) < \varepsilon/3$，可类似地推出(4·3)式，即$\|Tx-x\| < \varepsilon$. 总之，需要证明的已化成了当 $\lambda \in \left[\frac{\varepsilon}{3\delta}, 1-\frac{\varepsilon}{3\delta}\right]$和$\|x_1-x_0\| \geqslant \varepsilon/3$ 时，存在 $\xi(\varepsilon) > 0$，只要$\|Tx_0-x_0\| \leqslant \xi(\varepsilon)$，$\|Tx_1-x_1\| \leqslant \xi(\varepsilon)$，就有$\|Tx-x\| < \varepsilon$，其中 $x=(1-\lambda)x_0+\lambda x_1$.

设$y=Tx$，则

$$\|y-x_0\| \leqslant \|Tx-Tx_0\| + \|Tx_0-x_0\| \leqslant \xi(\varepsilon) + \lambda\|x_1-x_0\|$$

$$\|y-x_1\| \leqslant \|Tx-Tx_1\| + \|Tx_1-x_1\| \leqslant \xi(\varepsilon) + (1-\lambda)\|x_1-x_0\|$$

记

$$z_0 = \lambda^{-1}\|x_1-x_0\|^{-1}(y-x_0),$$

$$z_1 = (1-\lambda)^{-1}\|x_1-x_0\|^{-1}(x_1-y)$$

于是

$$\|z_0\| \leqslant 1+9\delta\varepsilon^{-2}\xi(\varepsilon), \qquad \|z_1\| \leqslant 1+9\delta\varepsilon^{-2}\xi(\varepsilon)$$

但是，当 $\lambda \in \left[\frac{\varepsilon}{3\delta}, 1-\frac{\varepsilon}{3\delta}\right]$时，$\|\lambda z_0+(1-\lambda)z_1\| = \|x_1-x_0\| \cdot \|x_1-x_0\|^{-1} = 1$. 因而，由$X$的一致凸性，可取 $\xi(\varepsilon)$充分小，使得$\|z_1-z_0\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$. 于是

$$\|Tx-x\| = \|y-x\| = \|(1-\lambda)(y-x_0)-\lambda(x_1-y)\|$$

$$\leqslant \lambda(1-\lambda)\|x_1-x_0\|\|z_1-z_0\| < \varepsilon.$$

证毕

**定理 4·4** 设$X$为一致凸 Banach 空间，$\Omega$是$X$的非空有界闭凸子集，$T: \Omega \to X$是非扩展的，则

(i) 若 $\{x_j\} \subset \Omega$，$x_j \to x_0 \in \Omega$ 且 $(I-T)(x_j) \mapsto y$，$y \in X$，则

$(I-T)(x_0)=y$.

(ii) $(I-T)(\Omega)$是$X$的闭子集.

**证明** 证(i). 如果对(i)中的$y$,用算子$T_y$:$T_y(x)=Tx+y$来代替$T$,则$T_y$也是非扩展的. 而且$(I-T_y)(x_j)=(I-T)(x_j)-y\to\theta$. 又因为如果$(I-T_y)(x_0)=\theta$,则$(I-T)(x_0)=y$,因而不失一般性,可设$y=\theta$.

设$\varepsilon_j=\|(I-T)(x_j)\|\to 0(j\to\infty)$. 对$\varepsilon_1$,存在一个满足定理4·3要求的$\xi(\varepsilon_1)$. 我们取$\xi(\varepsilon_1)<\varepsilon_1$,然后在$\{\varepsilon_j\}$中取出某$\varepsilon$,不妨用$\varepsilon_2$表之,使得$\varepsilon_2<\xi(\varepsilon_1)<\varepsilon_1$. 对$\varepsilon_2$,又存在一个满足定理4·3要求的$\xi(\varepsilon_2)$,使得$\xi(\varepsilon_2)<\varepsilon_2$. 这样,依归纳原理,我们可以抽出$\{\varepsilon_j\}$的一个子列,及相应的$\{x_j\}$的子列,都用原符号来记之,使得$\varepsilon_j<\xi(\varepsilon_{j-1})<\varepsilon_{j-1}(j=1,2,\cdots)$,具有定理4·3的结论. 我们断定,对任何$x\in\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{j\geq k}\{x_j\}\right)$,有$\|x-Tx\|\leqslant\varepsilon_{k-1}$. 事实上,若注意到这闭凸包$\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{j\geq k}\{x_j\}\right)$内的每一点都是某点列

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathrm{co}\{x_k,x_{k+1},\cdots,x_s\}\quad(s\geqslant k)$$

的极限点,及$\|\cdot\|$和$T$的连续性,就只需证明对任何$s\geqslant k$,当$x\in\mathrm{co}\{x_k,x_{k+1},\cdots,x_s\}$时,不等式$\|x-T_x\|\leqslant\varepsilon_{k-1}$成立.

对任意固定的$s\in\mathscr{N}$,我们用倒推归纳法来证明上述结论成立. 显然,当$k=s$时,不等式成立. 假设当$k<s$时不等式成立. 设$x\in\mathrm{co}\{x_{k-1},x_k,\cdots,x_s\}$,则$x$位于连结$x_{k-1}$与$\mathrm{co}\{x_k,\cdots,x_s\}$内某点$u$的线段上. 依归纳法假设,$\|Tu-u\|\leqslant\varepsilon_{k-1}\leqslant\xi(\varepsilon_{k-2})$且$\|Tx_{k-1}-x_{k-1}\|\leqslant\varepsilon_{k-1}\leqslant\xi(\varepsilon_{k-2})$. 从而,据定理4·3,得$\|Tx-x\|\leqslant\varepsilon_{k-2}$. 因而,我们已经证明了对每个$x\in\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{j\geq k}\{x_j\}\right)$,有$\|x-Tx\|\leqslant\varepsilon_{k-1}$. 但这个闭凸包是闭凸集,而Banach空间中的闭凸集必是序列式弱闭的(见本

章§7定理7·2的推论). 又 $x_j \to x_0$，所以，也有$\|x_0 - Tx_0\| \leq \varepsilon_j (j \geq 1)$，即$(I-T)(x_0)=\theta$.

证(ii). 设 $y$ 属于$(I-T)(\Omega)$的闭包，则存在$\{x_j\} \subset \Omega$，使得$(I-T)(x_j) \to y (j \to \infty)$. 因为$\Omega$是自反 Banach 空间的有界集，它是弱列紧的，不妨设 $x_j \rightharpoonup x_0$，而 $\Omega$ 是序列式弱闭的，故$x_0 \in \Omega$. 按(i) 的结论，$(I-T)(x_0)=y$. 这就证明了$(I-T)(\Omega)$是 $X$ 中的闭集.

**定理 4·5** (Browder, F. E., 1965, Gohde, D., 1965) 设$X$为一致凸 Banach 空间，$\Omega$是$X$的非空有界闭凸子集，$T: \Omega \to \Omega$ 是非扩展的，则$T$在$\Omega$内有不动点.

**证明** 依定理 4·1，存在点列$\{x_k\} \subset \Omega$满足 $(I-T)(x_k) \to \theta$. 由定理 4·4，$(I-T)(\Omega)$是闭集，所以 $\theta \in (I-T)(\Omega)$. 于是，存在$x_0 \in \Omega$，使得$(I-T)(x_0)=\theta$，即 $Tx_0 = x_0$.

证毕

因为 Hilbert 空间是一致凸的. 所以定理 4·5 对 Hilbert 空间当然成立. 对一般自反 Banach 空间，定理 4·5 是否成立呢？这还是一个未解决的问题. Kirk, W. A. 于 1965 年利用具有正规构造的集合的概念，来研究非扩展算子的不动点的存在性. 他证明了下述结果：设$\Omega$是自反 Banach 空间$X$的非空有界闭凸子集，且具有正规构造，$T: \Omega \to \Omega$ 是非扩展的，则$T$在$\Omega$内有不动点. 因为在一致凸赋范空间中的非空有界闭凸子集具有正规构造，所以 Kirk 的结果推广了定理 4·5，详见参考文献[19]的第二章.

## §5 非线性发展方程周期解的存在性

设$H$是实 Hilbert 空间，$x_0 \in H$，$x(t): [0, \infty) \to H$. 我们在本节将应用定理 4·5 来证明非线性发展方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t)), & t\in[0,\infty)\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{5.1}$$

周期解的存在性.

**定理 5·1** 设

(i) $f(t,x)$ 关于 $t$ 具有周期 $\omega>0$, 即 $f(t+\omega,\ x)=f(t,x)$ $(t\in[0,\infty), x\in H)$;

(ii) $\langle f(t,x)-f(t,y), x-y\rangle\leqslant 0, (t\in[0,\infty), x, y\in H)$;

(iii) 存在 $R>0$, 使得

$$\langle f(t,x),x\rangle<0(t\in[0,\omega],$$
$$x\in S_H(\theta,R)=\{x\in H\mid \|x\|=R\}).$$

又对任何 $x_0\in\bar{B}(\theta,R)$, 问题(5·1)有解 $x(t)$, 则(5·1)有周期为 $\omega$ 的唯一周期解.

**证明** 先证唯一性. 用反证法. 倘若 $x(\cdot), y(\cdot)$ 均满足 (5·1) 中的发展方程, 由

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2=\frac{d}{dt}\langle x(t),x(t)\rangle=2\langle\frac{d}{dt}x(t),x(t)\rangle \tag{5·2}$$

及条件(ii), 有

$$\frac{d}{dt}(\|x(t)-y(t)\|^2)=2\langle f(t,x(t))-f(t,y(t)),$$
$$x(t)-y(t)\rangle\leqslant 0$$

由上式知

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant\|x(0)-y(0)\|, \forall t\in[0,\infty) \tag{5·3}$$

从(5·3)式知, 如果 $x(0)=y(0)$, 则 $x(t)=y(t)$ $(t\in[0,\infty))$. 唯一性得证.

设 $x_0\in\bar{B}(\theta,R)$, $x(t)$ 是(5·1) 的解. 我们来证明当 $t\in[0,\ \omega]$ 时, $x(t)\in\bar{B}(\theta,R)$.

实际上, 若有 $t_0\in(0,\omega]$, 而 $\|x(t_0)\|>R$, 则由 $\|x(t)\|$ 的连续性

及$\|x(0)\|=\|x_0\|\leqslant R$,必存在 $\tau\in[0,t_0)$,使得$\|x(\tau)\|=R$. 令

$$M=\{t\in[0,t_0)\mid\|x(t)\|=R\}$$

显然 $M\neq\varnothing$. 记 $\tau_0=\sup M$,由$\|x(t)\|$的连续性,易知 $0\leqslant\tau_0<t_0$. 据假设(iii)和(5·2)有

$$\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2)\Big|_{t=\tau_0}=2\langle f(t,x(t)),x(t)\rangle\Big|_{t=\tau_0}<0$$

由此易知,存在 $\delta>0$,使 $\tau_0+\delta<t_0$ 且 $t\in(\tau_0,\ \tau_0+\delta)$ 时,$x(t)<x(\tau_0)$,从而 $\tau_0$ 就不会是$M$的上确界. 这与所设矛盾,于是我们已经证明了对任何 $t\in[0,\omega]$,$x(t)\in\bar{B}(\theta,R)$.

作算子$T$如下:对任一$x_0\in\bar{B}(\theta,R)$,设$x(t)$是问题(5·1)的解. 令

$$Tx_0=x(\omega) \tag{5·4}$$

则由上面证明的结果,算子$T$是$\bar{B}(\theta,R)$的自映射. 按(5·3)式,还有$\|Tx_0-Ty_0\|\leqslant\|x_0-y_0\|$,即$T$是非扩展的. 根据定理4·5,$T$有不动点$x_0$,$Tx_0=x_0$. 对此$x_0$,(5·1)有解$x(t)$. 此外,依(5·4)式,$x_0=Tx_0=x(\omega)$,故$x(0)=x(\omega)$.

由$x(0)=x(\omega)$及条件(i),$x_1(t)=x(t+\omega)$也是(5·1)的解. 因为前面已证明解是唯一的,所以

$$x(t)=x(t+\omega),\quad 0\leqslant t<\infty$$

可见,$x(t)$是(5·1)的周期解,周期是$\omega$.

证毕

## §6 非扩展算子的迭代法

本节我们来考虑迭代序列的收敛问题.

设$T$是非扩展算子,若$T^n w\to x_0$,则由$T$的连续性,$T^{n+1}w\to Tx_0$. 从而$Tx_0=x_0$,即$x_0\in\operatorname{fix}(T)$。可见非扩展算子的迭代序列若收敛,则一定收敛于不动点.

**一般来说**,$\{T^n w\}$的聚点不一定是$T$的不动点.

**例 1** 设 $X=[0,1]$，$\rho(x,y)=|x-y|$，定义 $T: X\to X$ 是 $Tx=1-x$. 那么当 $w\neq\frac{1}{2}$ 时，$\{T^n w\}$ 的聚点就不是 $T$ 的不动点.

我们知道，若序列 $\{a_n\}$ 收敛，则必有 $\|a_{n+1}-a_n\|\to 0$. 因此，$\|T^{n+1}w-T^n w\|\to 0$ 是序列 $\{T^n w\}$ 收敛的必要条件.

对于非扩展算子 $T$ 而言，数列 $\{\|T^{n+1}w-T^n w\|\}$ 单调不增，故它一定收敛，但极限不一定是零. 为此，引进如下概念.

**定义 6·1** 设 $X$ 是线性赋范空间，$T: \Omega\subset X\to X$，称 $T$ 在 $\Omega$ 上是渐近正则的，是指对任意的 $w\in\Omega$，$\|T^{n+1}w-T^n w\|\to 0(n\to\infty)$.

$T$ 渐近正则并不能保证序列 $\{T^n w\}$ 收敛.

**例 2** 设 $X=l^1$，$\Omega=\{x_n\,|\,x_n=\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\ 0,\ \cdots\},n\in\mathscr{N}\}$，$Tx_n=x_{n+1}$，则 $T: \Omega\to\Omega$ 是非扩展的且渐近正则. 但是对任意给定的 $w\in\Omega$，$\{T^n w\}$ 不收敛.

**定义 6·2** 设 $X$ 是线性赋范空间，$T: \Omega\subset X\to X$，称 $(T,\Omega)$ 满足条件 $(A)$，是指对于任意的有界闭集 $G\subset\Omega$，$\{z\,|\,z=x-Tx,\ x\in G\}$ 是 $X$ 的闭子集.

**定理 6·1** (Browder, F. E. 和 Petryshyn, W. V. 1966) 设

(i) $X$ 是线性赋范空间，$\Omega$ 是 $X$ 的闭子集，$T: \Omega\to\Omega$ 是非扩展的且渐近正则；

(ii) $(T,\Omega)$ 满足条件 $(A)$；

(iii) $\mathrm{fix}(T)\neq\varnothing$；

则对于任意给定的 $w\in\Omega$，$\{T^i w\}$ 收敛于 $T$ 在 $\Omega$ 上的不动点.

**证明** 因 $T$ 是非扩展算子，所以当取定 $y\in\mathrm{fix}(T)$ 时，对于任意的 $w\in\Omega$，$\{\|T^i w-y\|\}$ 单调不增. 故 $\{T^i w\}$ 有界. 令

$$K=\mathrm{cl}\{T^i w\,|\,i\in\mathscr{N}_0\}$$

其中 $\mathrm{cl}A$ 表示 $\bar{A}$，$\mathscr{N}_0$ 表示非负整数的全体，则 $K$ 是有界闭集且

$K\subset\Omega$. 由(ii), $M=\{z\mid z=x-Tx, x\in K\}$ 在$X$中闭. 因$T$渐近正则，所以 $\theta\in M$，即存在 $u\in K$, $u=Tu$，从而 $u\in\mathrm{fix}(T)$.

这样，或存在 $n_0\in\mathcal{N}_0$, $T^{n_0}w=u$；或存在$\{T^n w\}$的子列$\{T^{n_i}w\}$, $T^{n_i}w\to u\,(i\to\infty)$

若为前者情形，则已证明了 $T^n w\to u\,(n\to\infty)$；若为后者情形，则由$\|T^{n_i}w-u\|\to 0$及$\|T^n w-u\|$的单调性，也有 $T^n w\to u\,(n\to\infty)$.

证毕

**定理 6·2** 设

(i) $X$是一致凸赋范空间，$\Omega$是$X$的凸子集；

(ii) $T:\Omega\to\Omega$ 是非扩展的且 $\mathrm{fix}(T)\neq\varnothing$,

则对于任意的 $\alpha\in(0,1)$, $T_\alpha=\alpha I+(1-\alpha)T$ 是$\Omega$上的非扩展的、渐近正则的自映射且 $\mathrm{fix}(T_\alpha)=\mathrm{fix}(T)$

**证明** 任意取定 $\alpha\in(0,1)$. 因$\Omega$是凸集且 $T(\Omega)\subset\Omega$，所以 $T_\alpha(\Omega)\subset\Omega$. 此外，不难验证 $\mathrm{fix}(T_\alpha)=\mathrm{fix}(T)$ 且 $T_\alpha$是非扩展算子.

对于任意取定的 $w\in\Omega$，令 $z_i=T_\alpha^i w\,(i\in\mathcal{N}_0)$，则有

$$\|T_\alpha^{i+1}w-T_\alpha^i w\|=(1-\alpha)\|Tz_i-z_i\| \tag{6·1}$$

据(6·1)式，$\{\|T_\alpha^{i+1}w-T_\alpha^i w\|\}$单调不增，故存在 $r\geqslant 0$, $\|Tz_i-z_i\|\to r\,(i\to\infty)$. 所以只需验证 $r=0$ 就可以了.

倘若 $r>0$，取定 $y\in\mathrm{fix}(T)$，则 $w\neq y$. 因$\|Tz_i-z_i\|\leqslant\|Tz_i-y\|+\|z_i-y\|\leqslant 2\|z_i-y\|$，所以下面来估计$\|z_i-y\|$.

根据$X$的一致凸性，$\forall\varepsilon_i>0$，存在 $\delta_i=\delta_i(\varepsilon_i)$，使得当$\|Tz_i-z_i\|\geqslant\varepsilon_i\|z_i-y\|$时，有如下估计式

$$\begin{aligned}\|z_{i+1}-y\|&=\|\alpha(z_i-y)+(1-\alpha)(Tz_i-y)\|\\&\leqslant(1-2\delta_i\min\{\alpha,1-\alpha\})\max\{\|z_i-y\|,\|Tz_i-y\|\}\\&=(1-2\delta_i\min\{\alpha,1-\alpha\})\|z_i-y\|\quad(i\in\mathcal{N})\end{aligned}$$

取 $\varepsilon_i=\varepsilon=\frac{r}{\|w-y\|}$，则易验证$\|Tz_i-z_i\|\geqslant\varepsilon\|z_i-y\|(i\in\mathscr{N})$.
于是 $\delta_i=\delta(\varepsilon)$ 与 $i$ 无关. 记 $\theta=1-2\delta\min\{\alpha,1-\alpha\}$,则有 $0<\theta<1$
且

$$\|z_{i+1}-y\|\leqslant\theta\|z_i-y\|,\quad (i\in\mathscr{N})$$

所以

$$\|Tz_i-z_i\|\leqslant 2\|z_i-y\|\leqslant 2\theta\|z_{i-1}-y\|$$
$$\leqslant\cdots\leqslant 2\theta^i\|z_0-y\|\to 0\quad (i\to\infty)$$

这与 $r>0$ 矛盾. 故 $r=0$, 即有$\|T_\alpha^{i+1}w-T_\alpha^i w\|\to 0(i\to\infty)$. 因此
$T_\alpha$ 是渐近正则的. 证毕

称用 $T_\alpha$ 表示的迭代序列$\{T_\alpha^i w\}$为Mann 迭代序列. 定理 6·2
的意义在于通过 $T_\alpha$ 来研究$T$ 的不动点,此时$T$ 可能不是渐近正则
的,而得到的 $T_\alpha$ 却是渐近正则的.

**定理 6·3** (Browder, F. E. 和 Petryshyn, W. V. 1967) 设

(i) $X$ 是一致凸赋范空间, $\Omega$ 是$X$ 的闭凸子集;

(ii) $T:\Omega\to\Omega$ 是非扩展的且 $\text{fix}(T)\neq\varnothing$;

(iii) $(T,\Omega)$满足条件$(A)$,

则对任意的 $w\in\Omega$ 及 $\alpha\in(0,1)$, $\{T_\alpha^i w\}$收敛于$T$ 在$\Omega$上的不动点.

**证明** 由 $I-T_\alpha=(1-\alpha)(I-T)$及(iii)知, $(T_\alpha,\Omega)$满足条件
$(A)$. 根据定理 6·1 与定理 6·2,结论为真.

证毕

在以上几条定理的证明中,我们看到条件($A$)起着重要作用。
为了判定算子是否满足条件($A$),我们引入下列概念.

**定义 6·3** 设$X$是线性赋范空间，称算子 $T:\Omega\subset X\to X$ 在$\Omega$
上是次紧的,是指对于任意有界点列$\{x_i\}\subset\Omega$，若$\{x_i-Tx_i\}$收敛,
则存在$\{x_i\}$的收敛子列.

次紧的概念与连续的概念是互不包含的，即次紧的算子不一

定连续，连续算子亦不一定是次紧的.

**定理 6·4** 设 $T: \Omega\subset X\to X$ 在 $\Omega$ 上次紧且连续，则 $(T, \Omega)$ 满足条件 $(A)$.

**证明** 设 $G\subset\Omega$ 是有界闭集，记 $M=\{z\mid z=x-Tx, x\in G\}$. 设 $u\in\overline{M}$，则存在 $\{x_n\}\subset G$，$x_n-Tx_n\to u(n\to\infty)$.

因 $G$ 有界，所以 $\{x_n\}$ 是有界点列. 根据 $T$ 在 $\Omega$ 的次紧性，存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$. 依 $G$ 的闭性，$x_0\in G$. 而据 $T$ 的连续性，$Tx_{n_k}\to Tx_0(k\to\infty)$. 故有 $x_{n_k}-Tx_{n_k}\to x_0-Tx_0(k\to\infty)$.

因此，$u=x_0-Tx_0$，即 $u\in M$. 从而，$\overline{M}=M$. 故 $(T, \Omega)$ 满足条件 $(A)$.

证毕

由于非扩展算子是连续的，因此据定理 6·4，定理 6·1 与定理 6·3 中条件 $(A)$ 可以用 $T$ 是次紧的来代替.

下面给出判定算子次紧性的几个充分条件.

**定理 6·5** 设 $X$ 是线性赋范空间，$\Omega$ 是 $X$ 的子集，$T: \Omega\to X$. 则只要满足下列条件之一，$T$ 就是次紧的.

(i) $T(\Omega)$ 是列紧集;

(ii) $M=\{z\mid z=x-Tx, x\in\Omega\}$ 是 $X$ 的闭子集且 $(I-T)^{-1}$ 在 $M$ 上存在并连续;

(iii) $X$ 是 Hilbert 空间，$\langle Tx-Ty, x-y\rangle\leqslant a\|x-y\|^2$，当 $x, y\in X$，其中 $1-2a\geqslant 0$;

(iv) $X$ 是 Hilbert 空间，$\langle Tx-Ty, x-y\rangle\leqslant a\|Tx-Ty\|^2$，当 $x, y\in X$，其中 $1-2a\geqslant 0$.

**证明** 设 $\{x_n\}\subset\Omega$ 是有界点列且 $\{x_n-Tx_n\}$ 收敛.

(i) 因 $T(\Omega)$ 列紧，所以存在 $\{Tx_n\}$ 的收敛子列 $\{Tx_{n_k}\}$. 但 $x_{n_k}=(x_{n_k}-Tx_{n_k})+Tx_{n_k}$，故 $\{x_{n_k}\}$ 收敛.

(ii) 因$\{x_n-Tx_n\}$在$M$内收敛，$(I-T)^{-1}$在$M$上有定义且连续，所以$x_n=(I-T)^{-1}(x_n-Tx_n)$收敛.

(iii) 因$\{x_n-Tx_n\}$收敛，所以$\{x_n-Tx_n\}$必为Cauchy点列.由

$$\begin{aligned}
&\|(x_n-Tx_n)-(x_{n+p}-Tx_{n+p})\|^2\\
&=\|x_n-x_{n+p}\|^2+\|Tx_n-Tx_{n+p}\|^2-2\\
&\langle x_n-x_{n+p},Tx_n-Tx_{n+p}\rangle\\
&\geqslant(1-2a)\|x_n-x_{n+p}\|^2+\|Tx_n-Tx_{n+p}\|^2\\
&\geqslant\|Tx_n-Tx_{n+p}\|^2
\end{aligned}$$

知$\{Tx_n\}$是Cauchy序列. 因$X$完备，所以$\{Tx_n\}$收敛. 因此，$x_n=(x_n-Tx_n)+Tx_n$收敛.

(iv) 类似(iii)的证明.

证毕

**定理6·6** 设

(i) $X$是一致凸Banach空间，$\Omega\subset X$是非空有界闭凸集；

(ii) $T:\Omega\to\Omega$是非扩展的且$T(\Omega)$列紧，

则$T$在$\Omega$上有不动点且对于任意的$w\in\Omega$及$\alpha\in(0,1)$，迭代序列$\{T_\alpha^i w\}$收敛于$T$在$\Omega$上的不动点，其中，$T_\alpha=\alpha I+(1-\alpha)T$.

**证明** 因$X$是一致凸Banach空间且$\Omega\subset X$非空有界闭凸，所以根据定理4·5，$\mathrm{fix}(T)\neq\varnothing$. 由定理6·5的(i)，$T$是次紧的. 故$(T,\Omega)$满足条件$(A)$. 依定理6·3，结论为真.

证毕

我们希望对定理6·6作本质的推广：将一致凸赋范空间减弱为严格赋范空间. 为此，给出如下预备定理.

**引理6·1(Mazur定理)** 设$X$是Banach空间，$A$是$X$的紧子集. 则$\overline{\mathrm{co}}(A)$是紧集，其中$\overline{\mathrm{co}}(A)$表示$A$的闭凸包.

**证明** 因$X$完备，$\overline{\mathrm{co}}(A)$是闭集，所以，只需证明$\overline{\mathrm{co}}(A)$完全

有界即可.

对于任意给定的$\varepsilon>0$，由$A$的完全有界性知，存在$A$的$\frac{\varepsilon}{4}$-网：$\{z_1,\cdots,z_n\}\subset A$. 令

$$K=\mathrm{co}(\{z_1,\cdots,z_n\})=\left\{\sum_{i=1}^{n}\mu_i z_i \mid \mu_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n}\mu_i=1\right\}$$

显然

$$\overline{\mathrm{co}}(A)\subset\bigcup_{x\in\mathrm{co}(A)}B\left(x,\frac{\varepsilon}{4}\right) \tag{6·2}$$

设$y\in\mathrm{co}(A)$，则$y=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i$，其中$y_i\in A$，$\lambda_i\geqslant 0$且$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ ($1\leqslant i\leqslant m$). 对于$y_i\in A$，存在$z_k(y_i)\in\{z_1,\cdots,z_n\}$，有$\|y_i-z_k(y_i)\|<\frac{\varepsilon}{4}$. 令$\bar{y}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i z_k(y_i)$，则$\bar{y}\in K$且有$\|y-\bar{y}\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\|y_i-z_k(y_i)\|<\frac{\varepsilon}{4}$. 故有

$$\mathrm{co}(A)\subset K\text{ 的 }\frac{\varepsilon}{4}\text{-网} \tag{6·3}$$

联合(6·2)，(6·3)式，有

$$\overline{\mathrm{co}}(A)\subset K\text{ 的 }\frac{\varepsilon}{2}\text{-网} \tag{6·4}$$

定义映射$\varphi$：$\varphi(\mu_1,\cdots,\mu_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i z_i$，则$\varphi$是$E^n$中紧集$\{(\mu_1,\cdots,\mu_n)\mid\sum_{i=1}^{n}\mu_i=1,\mu_i\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n\}$到$K$上的连续映射，于是$K$是紧集. 因而$K$是完全有界的. 故存在$\{k_1,\cdots,k_m\}\subset K$，有如下关系

$$K\subset\{k_1,\cdots,k_m\}\text{的}\frac{\varepsilon}{2}\text{-网} \tag{6·5}$$

综合(6·4),(6·5)式,有$\overline{\mathrm{co}}(A)\subset\{k_1,\cdots,k_m\}$的 $\varepsilon$-网即$\{k_1,\cdots,k_m\}$是$\overline{\mathrm{co}}(A)$的 $\varepsilon$-网.

证毕

**定理 6·7**(Edelstein, M.,1966) 设

(i) $X$ 是严格赋范 Banach 空间,$\Omega\subset X$ 是闭凸集;

(ii) $T\cdot\Omega\to\Omega$ 是非扩展的且 $T(\Omega)$ 列紧;

(iii) $\mathrm{fix}(T)\neq\varnothing$,

则对于任意的 $w\in\Omega$ 及$\alpha\in(0,1)$,迭代序列$\{T_\alpha^i w\}$收敛于$T$在$\Omega$上的不动点,其中 $T_\alpha=\alpha I+(1-\alpha)T$.

**证明** 首先证明,$x\in\mathrm{fix}(T)$的充要条件是

$$\|T_\alpha x-y\|=\|x-y\|,\quad \forall y\in\mathrm{fix}(T) \tag{6·6}$$

实际上,当 $x\in\mathrm{fix}(T)=\mathrm{fix}(T_\alpha)$时,(6·6) 式显然成立. 反之,若(6·6)式对 $x\in\Omega$ 成立,则对 $y\in\mathrm{fix}(T)$,有

$$\begin{aligned}\|x-y\|=\|T_\alpha x-y\|&=\|\alpha(x-y)+(1-\alpha)(Tx-Ty)\|\\&\leqslant\alpha\|x-y\|+(1-\alpha)\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|\end{aligned}$$

所以

$$\|x-y\|=\alpha\|x-y\|+(1-\alpha)\|Tx-y\| \tag{6·7}$$

依$\|x-y\|=\|\alpha(x-y)+(1-\alpha)(Tx-y)\|$与$X$的严格赋范性,则存在 $\lambda>0$,$x-y=\lambda(Tx-y)$. 由(6·7)式知,$\lambda=1$, 即有 $Tx=x$. 故$x\in\mathrm{fix}(T)$.

任意取定 $w\in\Omega$,记$M=\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{cl}(T(\Omega)\cup\{w\}))$, 则$M\subset\Omega$. 因$\mathrm{cl}(T(\Omega)\cup\{w\})$是紧集,所以据 Mazur 定理, $M$是紧集. 注意到$\{T_\alpha^i w\}\subset M$,故存在 $y\in M$及$\{T_\alpha^i w\}$ 的子列$\{T_\alpha^{n_k}w\}$, $T_\alpha^{n_k}w\to y\ (k\to\infty)$. 若能证明$y\in\mathrm{fix}(T)$,则由$\{\|T_\alpha^i w-y\|\}$的单调性,亦有 $T_\alpha^i w\to y\ (i\to\infty)$.

以下证明 $y\in\mathrm{fix}(T)$.

倘若$y\overline{\in}\mathrm{fix}(T)$,把此处的 $y$ 视作(6·6) 式中的 $x$, 则由 $T_\alpha$ 的

非扩展性与(6·6)式，存在 $u\in \mathrm{fix}(T)$，使得

$$r=\|y-u\|-\|T_\alpha y-u\|>0 \tag{6·8}$$

因 $T_\alpha^{n_k}w\to y(k\to\infty)$ 且 $T_\alpha$ 连续，所以 $T_\alpha^{n_k+1}w\to T_\alpha y(k\to\infty)$. 故存在 $K$，当 $k\geqslant K$ 时，有

$$\begin{aligned}\|T_\alpha^{n_k+1}w-u\|&\leqslant\|T_\alpha^{n_k+1}w-T_\alpha y\|+\|T_\alpha y-u\|\\&<\frac{1}{2}r+\|T_\alpha y-u\|\end{aligned} \tag{6·9}$$

由 $T_\alpha$ 的非扩展性，并注意到(6·8)，(6·9)式，有

$$\begin{aligned}\|T_\alpha^{n_k+1}w-y\|&\geqslant\|y-u\|-\|T_\alpha^{n_k+1}w-u\|\\&>\frac{1}{2}r\quad(k\geqslant K)\end{aligned} \tag{6·10}$$

(6·10)式与 $T_\alpha^{n_k}w\to y(k\to\infty)$ 相矛盾．因此，$y\in\mathrm{fix}(T)$.

证毕

## *§7 凸集分离定理

本节我们来证明两条著名的凸集分离定理．为此先要引进线性空间的一些几何概念．设 $X$ 为实线性空间，$f$ 为 $X$ 上的非零实线性泛函，$c\in E^1$．我们称 $H=\{x\in X\,|\,f(x)=c\}$ 为 $X$ 中的超平面．四个水平集 $f^{\leqslant}(c)=\{x\in X\,|\,f(x)\leqslant c\}$，$f^{\geqslant}(c)=\{x\in X\,|\,f(x)\geqslant c\}$，$f^{<}(c)=\{x\in X\,|\,f(x)<c\}$，和 $f^{>}(c)=\{x\in X\,|\,f(x)>c\}$ 都称为由 $H$ 所确定的半空间．显然它们都是凸集．此外，若 $X$ 是实线性赋范空间，$f\in X^*$，则 $H$，$f^{\leqslant}(c)$ 及 $f^{\geqslant}(c)$ 皆为闭集，分别称为闭超平面和闭半空间，而 $f^{<}(c)$ 及 $f^{>}(c)$ 均为开集，称为开半空间.

请读者自己证明，如果 $H$ 是 $X$ 的超平面，则存在 $x_0\in H$ 及 $X$ 的非平凡线性子空间 $L$，使得 $H=x_0+L$，这里 $x_0+L$ 意指 $\{x_0+x\,|\,x\in L\}$．从而不难看出，闭超平面不含内点.

设 $X$ 为实线性空间，$A$、$B$ 均为非空子集．如果 $A\subset f^{\leqslant}(c)$ 且

$B\subset f^{\geqslant}(c)$ 或 $A\subset f^{\geqslant}(c)$ 且 $B\subset f^{\leqslant}(c)$ ($A\subset f^{<}(c)$ 且 $B\subset f^{>}(c)$ 或 $A\subset f^{>}(c)$ 且 $B\subset f^{<}(c)$)，则称超平面 $H$ 分离(严格分离) $A$ 与 $B$. 当满足关系 $A\subset f^{\leqslant}(c)$ 或 $A\subset f^{\geqslant}(c)$ 时，称 $A$ 位于 $H$ 的一侧. 不带等号时，称 $A$ 严格地位于 $H$ 的一侧.

实际上，著名的 Hahn-Banach 定理就是一种分离定理：设 $X$ 是实线性赋范空间. $A$ 是 $X$ 的凸开子集，$L$ 是 $X$ 的线性子空间，$x_0\in X$ 且 $A\cap(x_0+L)=\varnothing$，则存在闭超平面 $H$ 包含集 $x_0+L$ 且 $A$ 严格地在 $H$ 一侧.

现在给出超平面 $H=\{x\in X \mid f(x)=c\}$ 分离、严格分离两个集的几个等价形式：

$H$ 分离(严格分离) $A$ 与 $B$

$\Longleftrightarrow$ 当 $x\in A$ 时，$f(x)\leqslant c$ ($f(x)<c$) 且当 $x\in B$ 时，$f(x)\geqslant c$ ($f(x)>c$).

$\Longleftrightarrow \sup\limits_{x\in A} f(x)\leqslant \inf\limits_{x\in B} f(x)$ $\left(\sup\limits_{x\in A} f(x)<\inf\limits_{x\in B} f(x)\right)$

设 $X$ 是实线性赋范空间，$K$ 是 $X$ 的凸子集，$\theta\in K^{\circ}$，其中 $K^{\circ}$ 表集 $K$ 的内部. 本书用这种符号表示集的内部. 称

$$P_K(x)\doteq\inf\{r>0 \mid r^{-1}x\in K\} \quad (x\in X) \tag{7·1}$$

是 $K$ 的 Minkowski 泛函，也称为 $K$ 的承托函数 (support function). Minkowski 泛函有下列性质：

**引理 7·1** 设 $K\subset X$ 是凸集，$\theta\in K^{\circ}$，$P_K$ 是 $K$ 的 Minkowski 泛函，则

(i) $P_K: X\to[0,\infty)$ 连续；

(ii) $P_K(\alpha x)=\alpha P_K(x)$，$\forall x\in X, \alpha\geqslant 0$　　(正齐性)

$P_K(x+y)\leqslant P_K(x)+P_K(y)$　$\forall x,y\in X$，　　(次可加性)

(iii) $K^{\circ}\doteq\{x\in X \mid P_K(x)<1\}$，$\partial K=\{x\in X \mid P_K(x)=1\}$ 和 $X\setminus\overline{K}=\{x\in X \mid P_K(x)>1\}$，

这里 $\partial K$ 是 $K$ 的边界，即 $\partial K=\overline{K}\cap\overline{(X\setminus K)}$.

**证明** 先证(ii)中正齐性. 当$\alpha=0$时，显然成立. 对$\alpha>0$, 有

$$P_K(\alpha x)=\inf\{r>0\mid r^{-1}\alpha x\in K\}$$
$$=\alpha\inf\{\alpha^{-1}r>0\mid (\alpha^{-1}r)^{-1}x\in K\}=\alpha P_K(x).$$

再证次可加性. 设$x, y\in X$. $\forall\varepsilon>0$, 按(7·1), $\exists\, r, s>0$, 使得$r^{-1}x, s^{-1}y\in K$且

$$r<P_K(x)+\varepsilon/2,\quad s<P_K(y)+\varepsilon/2.$$

因为$K$是凸集，故$(r+s)^{-1}(x+y)=(r+s)^{-1}[r(r^{-1}x)+s(s^{-1}y)]\in K$. 于是

$$P_K(x+y)\leqslant r+s<P_K(x)+P_K(y)+\varepsilon.$$

由$\varepsilon$之任意性，得

$$P_K(x+y)\leqslant P_K(x)+P_K(y)$$

次证(i). 因为$\theta\in K^\circ$, 故可取$R>0$, 使得$B(\theta, R)\subset K$. 设$x\in X$, 则$R\|x\|^{-1}x\in B(\theta, R)\subset K$, 故$P_K(x)\leqslant R^{-1}\|x\|$. 由此知$P_K$在$x=\theta$处连续. 注意到$P_K(x)\geqslant 0$, 所以$P_K$还是$X$上的有界泛函. 因为已证得$P_K$是次可加的，故

$$-P_K(y-x)\leqslant P_K(x)-P_K(y)\leqslant P_K(x-y),\ \forall x, y\in X$$

可见，$P_K$连续.

最后证(iii). 显然，当$x\in K$时，$P_K(x)\leqslant 1$. 从而据(i), 对一切$x\in\overline{K}$, 也有$P_K(x)\leqslant 1$. 反之，设$x\in X$, $\rho=P_K(x)\leqslant 1$ 于是由(7·1), 存在$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0, \infty)$, 使得$r_n^{-1}x\in K$且当$n\to\infty$时，$r_n\to\rho$. 分两种情形来讨论. 若$\rho>0$, 则$r_n^{-1}\to\rho^{-1}$, $\rho^{-1}x\in\overline{K}$. 于是，从$\theta$, $\rho^{-1}x\in\overline{K}$及$\overline{K}$的凸性，也有$x\in\overline{K}$; 若$\rho=0$, 这时可取足够大的$n$, 使得$r_n<1$. 于是从$\theta$, $r_n^{-1}x\in K$及$K$的凸性，得$x=(1-r_n)\theta+r_n\cdot(r_n^{-1}x)\in K$. 因而，我们已经证明了$x\in\overline{K}$当且仅当$P_K(x)\leqslant 1$, 或等价地，$x\in X\setminus\overline{K}$当且仅当$P_K(x)>1$. 设$x\in K^\circ$, 则可取$\varepsilon>0$, 使得$(1+\varepsilon)x\in K$. 由此得$P_K(x)\leqslant(1+\varepsilon)^{-1}<1$; 反之，设$P_K(x)<1$,

则存在 $\delta>0$，使得当 $\|y-x\|\leqslant\delta$ 时，$P_K(y)<1$. 从而知 $\bar{B}(x,\delta)\subset K$. 可见，$x\in K^\circ$ 当且仅当 $P_K(x)<1$. 综上所述，也证明了 $x\in\partial K$ 当且仅当 $P_K(x)=1$

证毕

**引理 7·2** 设 $X$ 为实线性赋范空间. $K\subset X$ 是凸集，$\theta\in K^\circ$，$x_0\in X$，$x_0\overline{\in}K^\circ$，则存在闭超平面 $H$ 分离 $K$ 与 $\{x_0\}$.

**证明** 设 $P_K$ 是 $K$ 的 Minkowski 泛函，$L=\{\alpha x_0|\alpha\in E^1\}$. 定义 $L$ 上的实泛函 $F$，$F(\alpha x_0)=\alpha P_K(x_0)\ (\alpha\in E^1)$. 当 $\alpha\geqslant0$ 时，由引理 7·1 之(ii)，$F(\alpha x_0)=P_K(\alpha x_0)$；当 $\alpha<0$ 时，因为对 $X$ 中一切 $x$，$P_K(x)\geqslant0$，所以，$F(\alpha x_0)=\alpha P_K(x_0)\leqslant P_K(\alpha x_0)$. 由 Hahn-Banach 定理，存在 $X$ 上的线性泛函 $f$，使得对任何 $\alpha\in E^1$，$f(\alpha x_0)=\alpha P_K(x_0)$ 且对一切 $x\in X$，$f(x)\leqslant P_K(x)$. 因 $P_K$ 连续，故 $f$ 也连续. 最后，我们断言闭超平面 $H=\{x\in X|f(x)=1\}$ 分离 $K$ 与 $\{x_0\}$. 事实上，由引理 7·1 之(iii) 及 $x_0\overline{\in}K^\circ$，$f(x_0)=P_K(x_0)\geqslant1$ 且当 $x\in K$ 时，$f(x)\leqslant P_K(x)\leqslant1$.

证毕

**引理 7·3** 设 $A$、$B$ 皆为 $X$ 的凸子集，则超平面 $H$ 分离 $A$ 与 $B$ 当且仅当它分离 $A-B$ 与 $\{\theta\}$，此处 $A-B=\{x-y|x\in A,\ y\in B\}$.

**证明** 留作习题.

**定理 7·1**(凸集第一分离定理， Eidelheit, E.) 设 $X$ 是实线性赋范空间，$A$、$B$ 均为 $X$ 的非空凸子集，$A^\circ\neq\varnothing$ 且 $A^\circ\cap B=\varnothing$，则存在闭超平面 $H$ 分离 $A$ 与 $B$. 此外，若 $A$，$B$ 均为开集，则 $H$ 严格分离 $A$ 与 $B$.

**证明** 不失一般性，可设 $\theta\in A^\circ$. 否则，任取 $x_0\in A^\circ$，则 $\theta$ 是集 $A-x_0=\{x-x_0|x\in A\}$ 的内点. 注意到超平面 $H$ 分离 $A$ 与 $B$ 当且仅当 $H$ 分离 $A-x_0$ 与 $B-x_0$. 这样，也就化成了 $\theta\in A^\circ$ 的情形. 因为对任一 $y\in X$，$A^\circ-y$ 是开集，所以 $A^\circ-B=\{x-y|x\in A^\circ,\ y\in$

$B\} = \bigcup_{y \in B}(A^\circ - y)$是开集. 根据假设, $A$、$B$ 皆为凸集, 所以 $A^\circ$、$A^\circ - B$ 都是凸集. 取 $y_0 \in B$, $A^\circ - B + y_0 = (A^\circ - B) + y_0$, 则显然

$$M = A^\circ - B + y_0$$

仍是凸开集. 此外, 由于 $\theta \in A^\circ$, 故 $\theta \in M = M^\circ$. 因为 $A^\circ$ 与 $B$ 不交, 所以 $y_0 \overline{\in} M^\circ$. 依引理 7·2, 存在闭超平面 $H = \{x \in X \mid f(x) = c\}$ 分离 $M$ 与 $\{y_0\}$. 按引理 7·3, $H$ 分离 $A^\circ - B$ 与 $\{\theta\}$. 再由引理 7·3, $H$ 分离 $A^\circ$ 与 $B$.

下证 $H$ 分离 $A$ 与 $B$. 设当 $x \in A^\circ$ 时, $f(x) \leqslant c$. 对任一 $x_0 \in A$ 且 $x_0 \in \partial A$. 因为 $A$ 凸, $\theta \in A$, 所以 $tx_0 = (1-t)\theta + tx_0 \in A (0 \leqslant t < 1)$. 我们来证明, 对足够小的 $\delta > 0$, $B(tx_0, \delta) = tx_0 + B(\theta, \delta) \subset A$. 事实上, 对每一 $\delta > 0$, 因为 $x_0 \in A$, 所以

$$B(tx_0, \delta) \subset tA + B(\theta, \delta)$$

因 $t$ 是固定的, $1 - t > 0$, $\theta \in A^\circ$, 故可取足够小的 $\delta$, 使得 $B(\theta, \delta) \subset (1-t)A$. 于是

$$B(tx_0, \delta) \subset tA + (1-t)A = A$$

我们已经证明了 $tx_0 \in A^\circ (0 \leqslant t < 1)$. 由于 $tf(x_0) = f(tx_0) \leqslant c$, 令 $t \to 1$, 得 $f(x_0) \leqslant c$. 因此 $H$ 分离 $A$ 与 $B$.

最后, 设 $A$, $B$ 均为开集. 则存在分离 $A$ 与 $B$ 的超平面 $H_1$. 因为 $H_1$ 不含内点, 故 $H_1$ 严格分离 $A$ 与 $B$.

证毕

**定理 7·2** (凸集第二分离定理, Ascoli) 设 $X$ 为实线性赋范空间, $A$、$B$ 均为 $X$ 的非空凸子集, 且 $A$ 是紧集, $B$ 是闭集, $A \cap B = \varnothing$, 则存在闭超平面严格分离 $A$ 与 $B$.

**证明** 对任一 $\delta > 0$, 令 $A_\delta = A + B(\theta, \delta)$. 因 $A$ 与 $B(\theta, \delta)$ 皆为凸集, $A_\delta = \bigcup_{x \in A} B(x, \delta)$, 故 $A_\delta$ 是凸开集. 今证存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $A_{\delta_0}$ 与 $B$ 不交. 若不然, 则有 $\delta_n > 0$, $\delta_n \to 0$, $x_n \in A$ 和 $y_n \in B$, 而

$$\|x_n - y_n\| < \delta_n \quad (n \in \mathscr{N})$$

因$A$紧，故不妨设$x_n \to x_0 \in A$. 从而，也有$y_n \to x_0$. 但$B$闭，故$x_0 \in B$. 此与$A \cap B = \varnothing$相矛盾. 按定理7·1，存在闭超平面$H = \{x \in X \mid f(x) = r\}$分离$A_{\delta_0}$与$B$. 设$A_{\delta_0} \subset f^{\leqslant}(r)$，$B \subset f^{>}(r)$. 由于$A$紧，可设$f$在$x_0 \in A$达到其最大值$r_0$. 由$A_{\delta_0}$的作法，必有$r_0 < r$. 取满足$r_0 < c < r$的$c$，则$H_1 = \{x \in X \mid f(x) = c\}$严格分离$A$与$B$.

证毕

在这里着重指出，上述两条定理我们仅就赋范空间证明的. 实际上，定理7·1对线性拓扑空间成立，定理7·2对局部凸线性拓扑空间也成立.

**推论** 设$X$为实线性赋范空间，$A$是$X$的非空闭凸集，则$A$是序列式弱闭的.

**证明** 设$x_n \in A$，$x_n \rightharpoonup x_0 \in X$. 若$x_0 \overline{\in} A$，因$\{x_0\}$是紧集，故由定理7·2，存在$f \in X^*$及$\varepsilon_0 > 0$，使得$f(x) > f(x_0) + \varepsilon_0 \ (\forall x \in A)$. 这显然与$x_n \in A$，$x_n \rightharpoonup x_0$矛盾.

下一节我们将证明，若$X$是实线性赋范空间，$A \subset X$是序列式弱闭集，则$A$是闭集.

## *§8 弱拓扑和弱紧集

鉴于本章和第四、五两章多次用到序列式弱闭、弱闭、弱*闭、弱紧、弱闭包等概念，我们将就线性赋范空间的情形，介绍这些基本概念和结论，但不在一般的线性拓扑空间中讨论这些内容.

### 8·1 线性赋范空间上的弱拓扑

设$X$为实线性赋范空间，$X^*$是它的共轭空间. 让我们回想起，$X$中的点列$\{x_n\}$弱收敛于$x_0 \in X$，是指对每一$f \in X^*$，都有$f(x_n) \to$

$f(x_0)\ (n\to\infty)$. 但是能够证明，在$X$内不能引入一种距离，使得弱收敛等价于按距离收敛. 现在我们进一步分析一下弱收敛的意义. $x_n\to x_0$ 意指对任一$\varepsilon>0$与每一$f\in X^*$，存在自然数$N=N(\varepsilon, f)$，使得

$$|f(x_k)-f(x_0)|<\varepsilon \quad 当\ k>N$$

于是，对任何有限多个$f_1,\cdots,f_n\in X^*$，可取

$$N=N(f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)=\max_{1\leq i\leq n}N(\varepsilon,f_i)$$

使得

$$|f_i(x_k)-f_i(x_0)|<\varepsilon \quad 当\ k>N,\ i=1,\cdots,n \tag{8·1}$$

作集合

$$U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)=\{x\in X\ |\ |f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots,n\} \tag{8·2}$$

由(8·1)和(8·2)得

$$x_k\in U(x_0;f_1,\cdots f_n;\varepsilon) \quad 当\ k>N \tag{8·3}$$

我们知道拓扑空间中点列收敛是用邻域刻划的. 如果(8·2)式表达的诸集确实具有邻域的性质，那么弱收敛就可以用一种拓扑来刻划了. 下面我们先介绍如何用邻域公理来定义拓扑空间.

**定义 8·1** 设$X$是非空集合. 若对$X$中每一元素$x$，都对应一个集族$\mathscr{U}(x)$，满足下列条件:

1° $\mathscr{U}(x)\neq\varnothing$;

2° 若$U\in\mathscr{U}(x)$，则$x\in U$;

3° 若$U,V\in\mathscr{U}(x)$，则$U\cap V\in\mathscr{U}(x)$;

4° 若$U\in\mathscr{U}(x)$且$V\supset U$，则$V\in\mathscr{U}(x)$;

5° 若$U\in\mathscr{U}(x)$，则存在$V\in\mathscr{U}(x)$，使得$U\supset V$且对任一$y\in V$，有$V\in\mathscr{U}(y)$，

则称$X$是拓扑空间，$\mathscr{U}(x)$中每一成员都称为点$x$的邻域.

**定义 8·2** 设$G$是拓扑空间$X$的一个子集，如果$G$本身是它的每一点的邻域，则称$G$是开集. 一个集合的余集若是开集，则称该集为闭集.

如此定义开集后，容易验证满足通常定义拓扑空间的开集公理：1° 整个空间$X$与空集是开集；2° 任意多个开集的并集是开集；3° 任意有限多个开集的交集是开集. 反之，如果用开集定义拓扑空间，而把包含一点的任何开集都称为此点的邻域，则如此定义的邻域具有定义 8·1 中的五条性质，这是容易证明的.

**定义 8·3** 设 $X$ 是拓扑空间，$\Omega\subset X$，$x\in X$。如果点 $x$ 的任何邻域都含有 $\Omega$ 中的点，则称 $x$ 为 $\Omega$ 的接触点. $\Omega$ 的所有接触点的集合，称为$\Omega$的闭包，记作$\overline{\Omega}$.

**定义 8·4** 设$X$是拓扑空间，$x\in X$. 点 $x$ 的一些邻域的族$\mathscr{B}(x)$称为点 $x$ 的邻域基，是指对 $x$ 的任何邻域 $U$，必存在 $V\in\mathscr{B}(x)$，使得 $U\supset V$.

现在回到实线性赋范空间$X$上来. 用 $\mathscr{B}(x_0)$表示由 (8·2) 式所定义的集 $U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)$的全体. 作含有点 $x_0$ 的集族$\mathscr{U}(x_0)$如下：

$$U\in\mathscr{U}(x_0)\text{当且仅当存在 }U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\ \varepsilon)\in\mathscr{B}(x_0),$$
$$\text{使得 }U\supset U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)$$

今证$\mathscr{U}(x_0)$满足邻域公理(见定义 8·1)：

1° 显然 $\mathscr{U}(x_0)\neq\varnothing$；

2° 设 $U\in\mathscr{U}(x_0)$. 由定义，存在 $U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)$，使得 $U\supset U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)$. 由于 $x_0\in U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)$，故 $x_0\in U$；

3° 设 $U,V\in\mathscr{U}(x_0)$，则存在 $U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon_1)$，$U(x_0;g_1,\cdots,g_m;\varepsilon_2)\in\mathscr{B}(x_0)$，使得 $U\supset U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon_1)$，$V\supset U(x_0;g_1,\cdots,g_m;\varepsilon_2)$. 取 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$，不妨设此处诸 $f_i$ 与 $g_j$是不重复的. 于是

$$U\cap V\supset U(x_0;f_1,\cdots,f_n;g_1,\cdots,g_m;\varepsilon)$$

从而 $U\cap V\in\mathscr{U}(x_0)$;

4° 设 $U\in\mathscr{U}(x_0)$ 且 $V\supset U$. 于是存在 $U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\ \varepsilon)$, 使得 $U\supset U(x_0;f_1,\ \cdots,\ f_n;\varepsilon)$. 由此知 $V\supset U(x_0;\ f_1,\ \cdots,\ f_n;\ \varepsilon)$, 故 $V\in\mathscr{U}(x_0)$;

5° 设 $U\in\mathscr{U}(x_0)$, 则存在 $V=U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)\in\mathscr{B}(x_0)$, 使得 $U\supset V$. 对任一 $y\in V$, 有

$$|f_i(y)-f_i(x_0)|<\varepsilon\quad i=1,\cdots,n$$

由此知

$$\varepsilon_0=\varepsilon-\max_{1\leqslant i\leqslant n}|f_i(y)-f_i(x_0)|>0$$

设 $x\in U(y;f_1\cdots,f_n;\varepsilon_0)$, 于是有

$$\begin{aligned}|f_i(x)-f_i(x_0)|&\leqslant|f_i(x)-f_i(y)|+|f_i(y)-f_i(x_0)|\\&<\varepsilon_0+|f_i(y)-f_i(x)|\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

这说明 $x\in V$, 所以 $U(y;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon_0)\subset V$. 据 4°, $V\in\mathscr{U}(y)$.

由以上的推导可知, 当 $X$ 是实线性赋范空间时, 若对每一点 $x\in X$, 以 $\mathscr{U}(x)$ 为点 $x$ 的邻域族, 则 $X$ 成为拓扑空间. $\mathscr{B}(x)$ 是点 $x$ 的邻域基.

**定义 8·5** 设 $X$ 为实线性赋范空间, 对 $X$ 中任一点 $x$, 令 $\mathscr{U}(x)$ 是点 $x$ 的邻域全体. 此时, 称 $X$ 赋予了弱拓扑, $\mathscr{U}(x)$ 中每个成员称为 $x$ 的弱拓扑下的邻域, 简称弱邻域.

结合定义 8·2, 8·3 和 8·5, 自然引出 $X$ 中的弱拓扑下的开集、弱拓扑下的闭集和弱拓扑下的闭包等概念, 本书分别简称这些概念为弱开集、弱闭集和弱闭包等. 设 $\Omega\supset X$. 记 $\overline{\Omega}$ 是范数拓扑下的闭包, $\overline{\Omega}_w$ 是弱闭包和 $\overline{\Omega}_{w,s}$ 是 $\Omega$ 的序列式弱闭包, 即

$$x\in\overline{\Omega}_{w,s}\ 当且仅当存在\ x_n\in\Omega,使得\ x_n\rightharpoonup x$$

值得指出的是序列式弱闭包并不一定满足 $\overline{(\overline{\Omega}_{w,s})}_{w,s}=\overline{\Omega}_{w,s}$. 因此序列式弱闭包不满足闭包公理, 不能以它定义拓扑. 当 $\overline{\Omega}_{w,s}=$

$\Omega$ 时，$\Omega$ 是序列式弱闭的(第一章已用过此术语)．

**定理 8·1** 设 $X$ 为实线性赋范空间，$\Omega$ 为 $X$ 的非空子集，则有

$$\overline{\Omega}\subset\overline{\Omega}_{w,s}\subset\overline{\Omega}_w \tag{8·4}$$

**证明** 设 $x_0\in\overline{\Omega}$，则存在 $x_n\in\Omega$，使得 $x_n\to x_0$．从而 $x_n\rightharpoonup x_0$．因此 $x_0\in\overline{\Omega}_{w,s}$，即 $\overline{\Omega}\subset\overline{\Omega}_{w,s}$．

设 $x_0\in\overline{\Omega}_{w,s}$，则有 $x_n\in\Omega$，使得 $x_n\rightharpoonup x_0$．对 $x_0$ 的任何弱邻域 $U$，存在 $U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)\in\mathscr{B}(x_0)$，使得

$$U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)\subset U$$

我们来证明 $U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)\cap\Omega\neq\varnothing$．若如此，就有 $U\cap\Omega\neq\varnothing$，这说明 $x_0$ 是 $\Omega$ 在弱拓扑下的接触点，故 $x_0\in\overline{\Omega}_w$．事实上，如果 $U(x_0,f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)\cap\Omega=\varnothing$，则必存在某个 $i$，$1\leqslant i\leqslant n$，及 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{nj}\}$，使得

$$|f_i(x_{nj})-f_i(x_0)|\geqslant\varepsilon,\quad\forall j\in\mathscr{N}$$

此式说明 $\{x_n\}$ 不可能弱收敛于 $x_0$，这是矛盾的．因此，确实有 $U(x_0;f_1,\cdots,f_n;\varepsilon)\cap\Omega\neq\varnothing$．

证毕

**推论 1** 如果 $\Omega$ 是序列式弱闭集，则它也是闭集．如果 $\Omega$ 是弱闭集，则 $\Omega$ 既是序列式弱闭集，也是闭集．

**证明** 设 $\Omega$ 是弱闭集，则由(8·4)有

$$\Omega\subset\overline{\Omega}\subset\overline{\Omega}_{w,s}\subset\overline{\Omega}_w=\Omega$$

由此得

$$\Omega=\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_{w,s}=\overline{\Omega}_w$$

所以 $\Omega$ 是序列式闭的，也是闭的．从这个证明中顺便看出当 $\Omega$ 是序列式弱闭集时，它也是闭集．

证毕

**推论 2** 如果 $\Omega$ 是凸集，则 $\Omega$ 是闭集当且仅当它是序列式弱闭的．

**证明** 由推论 1 及本章定理 7·2 的推论即得.

下面我们来证明更强的结论:

定理 8·2 设 $X$ 为实线性赋范空间, $\Omega\subset X$ 是凸集, 则 $\Omega$ 是闭集当且仅当它是弱闭集

**证明** 由定理 8·1 的推论, 只需证明当 $\Omega$ 是闭集时, $\Omega=\overline{\Omega}_w$. 假若不然, 则存在 $a\in\overline{\Omega}_w$, 但 $a\bar{\in}\Omega$ 因为 $\Omega$ 是闭凸集, $\{a\}$ 是紧集, 所以由凸集第二分离定理, 存在 $f\in X^*$, 使得

$$\alpha=\sup_{x\in\Omega}f(x)<f(a)$$

由此知 $a$ 属于开半空间 $f^>(\alpha)=\{x\mid f(x)>\alpha\}$. 取 $\varepsilon$ 满足 $0<\varepsilon<f(a)-\alpha$, 则易证

$$U(a,f,\varepsilon)=\{x\mid |f(x)-f(a)|<\varepsilon\}\subset f^>(a)$$

因 $U(a;f;\varepsilon)$ 是点 $a$ 的弱邻域, 据邻域性质 4°, $f^>(a)$ 也是点 $a$ 的弱邻域. 但 $\Omega\cap f^>(a)=\varnothing$, 这与 $a\in\overline{\Omega}_w$ 矛盾. 因此, $\Omega$ 是弱闭集.

证毕

最后, 我们来讨论实线性赋范空间 $X$ 的共轭空间 $X^*$ 上的拓扑, $X^*$ 是 Banach 空间. 设 $f_0\in X^*$. 按 (8·2) 式, 任取有限个 $x_1^*,\cdots,x_n^*\in X^{**}$ ($X$ 的第二共轭空间) 及任意 $\varepsilon>0$, 所有可能的

$$V(f_0;x_1^*,\cdots,x_n^*;\varepsilon)=\{f\in X^*\,\big|\,|x_i^*(f)-x_i^*(f_0)|<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

构成 $X^*$ 在点 $f_0$ 处弱拓扑的邻域基. 由此可生成 $X^*$ 上的弱拓扑. 此外, $X^*$ 上还有另一种重要拓扑, 称为弱* 拓扑, 它在任一点 $f_0$ 的邻域基是这样组成的: 任取 $x_1,\cdots,x_n\in X$ 及对任意 $\varepsilon>0$, 作

$$V(f_0;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon)=\{f\in X^*\,\big|\,|f(x_i)-f_0(x_i)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots,n\}$$

$X^*$ 按弱* 拓扑也构成拓扑空间. 我们把按弱* 拓扑的开集、闭集、闭包等简称为弱* 开集、弱* 闭集、弱* 闭包等.

关于空间 $X^*$ 上这三种拓扑按拓扑细粗来比较, 有如下关系:

范数拓扑比弱拓扑细, 弱拓扑比弱* 拓扑细

对空间$X$上的两种拓扑也是如此．本书就不详细讨论这些内容了．当$X$是自反 Banach 空间时，$X=X^{**}$．所以$X^*$上的弱*拓扑与弱拓扑一致．

## 8·2 弱紧集

先介绍一下关于拓扑空间中有关紧性的一些概念和结果．

**定义 8·6** 设$X$为拓扑空间，$\Omega$是$X$的非空子集．又设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$X$的一族开集．如果$\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha\supset\Omega$，则称$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$\Omega$的一个开覆盖．集$\Omega$称为紧集，是指对$\Omega$的任何一个开覆盖$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$，存在$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$的一个有限子族覆盖$\Omega$．如果整个空间$X$是紧集，则称$X$是紧拓扑空间．

一般来说，拓扑空间中的紧集不一定是闭集．但是，如果拓扑空间是 Hausdorff 的，即对$X$中任何两个不相同的元素$x,y$，存在分别包含$x$与$y$的不相交邻域(这叫分离公理)，则$X$中的紧集必为闭集．此结论的证明可在任何一本点集拓扑书中找到．

**定义 8·7** 集族$\mathscr{S}$称为具有有限交性质，是指$\mathscr{S}$非空且$\mathscr{S}$的任何有限子族也有非空交．

**定理 8·3** 拓扑空间$X$是紧的当且仅当$X$中的任何具有有限交性质的闭子集族有非空交．

这条定理是说：$X$是紧拓扑空间当且仅当如果$\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$X$中的具有有限交性质的一族闭子集，则$\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha\neq\varnothing$．

**证明** 设$X$是紧的，$\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$是具有有限交性质的闭子集族。作$G_\alpha=X\setminus F_\alpha$，则$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$X$的一族开子集．倘若$\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha=\varnothing$，则$X=\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$，即这族开子集覆盖$X$．因$X$是紧的，所以存在有限个$G_1,G_2,\cdots,G_n$，使得$X=\bigcup_{i=1}^{n}G_i$．从而$\bigcap_{i=1}^{n}F_i=\varnothing$，其中$F_i=X\setminus G_i$．

此与$\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$具有有限交性质矛盾.

反之,假设定理的条件成立,但$X$非紧. 于是存在$X$的某个开覆盖$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$,而它的任何有限子族都不能覆盖$X$. 记$F_\alpha=X\setminus G_\alpha$,则$\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha=X\setminus\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha=\varnothing$,而对闭子集族$\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$中任何有限个$F_1,\cdots,F_n$,$\bigcap\limits_{i=1}^{n}F_i=X\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_i\neq\varnothing$. 此与假设矛盾.

证毕

设$\Omega$是实线性赋范空间$X$中的非空子集. 如果对$\Omega$中的任何点列$\{x_n\}$,都有子列$\{x_{n_k}\}$及$x_0\in X$,使得$x_{n_k}\rightharpoonup x_0$,则称$\Omega$是弱列紧的. 弱列紧集不一定是序列式弱闭的.

**定义8·8** 实线性赋范空间$X$中的弱列紧且序列式弱闭的子集,称为序列式弱紧的. $X$中在弱拓扑下的紧集,简称为弱紧集.

我们来证明实线性赋范空间的弱拓扑是Hausdoff拓扑. 事实上,只需证明对任一$x_0\neq\theta$,存在$\theta$的不含$x_0$的弱邻域就可以了. 由Hahn-Banach定理,存在$f\in X^*$,使得$f(x_0)=\|x_0\|$. 取$\varepsilon=\frac{1}{2}\|x_0\|$,则$x_0\bar{\in}U(\theta;f;\varepsilon)$.

因此,弱紧集必为弱闭集. 结合定理8·1的推论1,有

$$\text{弱紧集}\Longrightarrow\text{弱闭集}\Longrightarrow\text{序列式弱闭集}\Longrightarrow\text{闭集}$$

下列定理表明对Banach空间中的弱紧集来说,可以不用弱拓扑,而用弱收敛来处理问题.

**定理8·4**(Eberlein) 设$X$为Banach空间. $X$中的子集是弱紧的当且仅当它是序列式弱紧的.

在此省略其证明,可参看参考文献[25]PP. 158.

## 习　题

1. 设$X$是完备距离空间，$T_n: X\to X$是连续算子列. 假定每一$T_n$有不动点$x_n$.

(a) 设在$X$上$T_n$一致收敛于$T$. 试证

(i) 若$x_n\to x_0$或者$Tx_n\to x_0$，则$x_0$是$T$的不动点；

(ii) 若$T$是压缩的，则$\{x_n\}$收敛于$T$的唯一不动点.

(b) 设$\{T_n\}$逐点收敛于$T$，每一$T_n$是Lipschitz的，且存在$M>0$，使得$L(T_n)\leqslant M\ (n\in\mathcal{N})$. 试证

(i) $T$是Lipschitz的且$L(T)\leqslant M$；

(ii) 若$x_n\to x_0$，则$x_0$是$T$的不动点；

(iii) 若$M<1$，则$\{x_n\}$收敛于$T$的唯一不动点.

2. 设$H$是实Hilbert空间，算子$r: H\to \bar{B}(\theta,c)$定义如下：

$$r(x)=\begin{cases} x & x\in \bar{B}(\theta,c) \\ c\dfrac{x}{\|x\|}, & \text{否则} \end{cases}$$

试证$r$是非扩展的.

3. 设$H$是实Hilbert空间，$T: \bar{B}(\theta,r)\to H$是非扩展的. 证明下列两结论至少有一个成立：

(i) $T$有不动点.

(ii) 存在$x\in\partial B(\theta,r)$及$0<\lambda<1$，使得$x=\lambda Tx$.

提示：利用习题2，并考虑映射$r\circ T$.

4. 设$X$和$Y$均为距离空间，$X$是完备的，$G\subset Y$. 又设$T: X\to Y$连续并对某$\eta>0$满足下列条件：

(*) 若$x\in X, Tx\bar{\in} G$，则存在$z\in X$，使得

$$0<\rho(x,Z)\leqslant\eta(\rho(Tx,G)-\rho(Tz,G))$$

证明存在$a\in X$，使得$Ta\in G$.

提示：作$S: X\to X$如下：

$$Sx=\begin{cases} z & \text{条件(*)中的}z),\ x\in X\text{ 且 }Tx\bar{\in} G \\ x, & \text{否则} \end{cases}$$

并取$\varphi(x)=\eta\rho(Tx,G)$.

5. 设$X$为Banach空间，$\varphi: [0,\infty)\to[0,\infty)$连续且满足当$r>0$时，$\varphi(r)$

<r. 设 $T: X\to X$ 具有性质

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\varphi(\|x-y\|),\forall x,y\in X$$

证明 $I-T$ 是 $X$ 上的双射且 $(I-T)^{-1}$ 在 $X$ 上连续。

6. 设 $X$ 为 Banach 空间。称

$$\delta(\varepsilon)=\inf\left\{1-\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \,\middle|\, x,y\in\bar{B}(\theta,1)\text{ 且 }\|x-y\|\geqslant\varepsilon\right\}$$

为空间 $X$ 的凸性模数，$\delta$: $[0,2]\to[0,1]$. 又设 $\varepsilon_0=\sup\{\varepsilon|\delta(\varepsilon)=0\}$. 试证 $X$ 是一致凸的当且仅当 $\varepsilon_0=0$, $X$ 是严格凸的当且仅当 $\delta(2)=1$.

7. 直接证明空间 $L^1(-\infty,\infty)$ 不是一致凸的.

8. 设 $X$ 是实 Hilbert 空间，$\Omega\subset^{v}$ 是闭凸集且 $T$: $\Omega\to\Omega$ 在 $\Omega$ 上是非扩展算子。证明 $I-T$ 在 $\Omega$ 上是次闭的.（算子 $f:\Omega\subset H\to H$ 称为次闭的，是指若 $\{x_n\}\subset\Omega$, $x_n\to x$ 且 $f(x_n)\to y$, 则 $x\in\Omega$ 且 $y=f(x)$）

9. 考虑 Hammerstein 型积分方程

$$\varphi(x)-\int_0^1 K(x,y)g(\varphi(y))dy=f(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

其中 $K,g,f$ 皆为实值连续函数. 假设函数 $g$ 满足 Lipschitz 条件

$$|g(x')-g(x'')|\leqslant L|x'-x''|$$

证明当 $L\|K\|<1$ 时，上述方程在 $C[0,1]$ 有唯一解. 此处，$\|K\|$ 是从 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的线性积分算子 $K$:

$$(K\varphi)(x)=\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy$$

的范数.

10. 设 $X$ 是紧距离空间，$T$: $X\to X$ 是严格非扩展算子. 证明 $T$ 有不动点.

11. 设 $X$ 是 Banach 空间。称算子 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to X$ 是广义压缩的，是指对每一 $x\in\mathscr{D}(T)$，存在 $\alpha(x)<1$，使得

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\alpha(x)\|x-y\|,\quad\forall y\in\mathscr{D}(T)$$

今设 $\mathscr{D}(T)$ 是有界开凸集，$T:\mathscr{D}(T)\to X$ 是连续 $F$-可微分的。试证 $T$ 是广义压缩的，当且仅当在 $\mathscr{D}(T)$ 上 $\|F'(x)\|<1$.

12. 设 $X$ 是某 Banach 空间 $Y$ 的共轭空间，$T:\Omega=\bar{B}(x_0,r)\subset X\to X$ 是广义压缩的且 $T(\partial\Omega)\subset\Omega$. 证明 $T$ 有唯一不动点。

# 第三章　拓扑度理论

研究非线性算子方程

$$F(x)=0$$

或者方程

$$f(x)=p$$

解的存在性有各种方法，如解析方法、变分方法、单调性方法以及下面我们将要讨论的拓扑度方法等等．鉴于很多非线性方程的解并不唯一，实际问题需要估计解的个数，因此多解问题也是研究非线性方程的一个重要课题．

拓扑度是几何概念．它对常微分方程、偏微分方程、积分方程和积微分方程的定性研究，即解的存在性、估计解的个数、分枝解问题、解的稳定性和分歧理论都是极好的工具．粗略地说，拓扑度是反映方程解的某种“代数个数”的一种量度，它是与映射 $f$ 和区域 $\Omega$ 有关的整值函数．两种最成功的拓扑度理论是：有限维赋范空间上的 Brouwer 度和无限维赋范空间上的 Leray-Schauder 度．

1912 年，Brouwer 用代数拓扑学方法创立了 Brouwer 度，进而得到了著名的 Brouwer 不动点定理，1934 年，Schauder 将度理论引入到无穷维赋范空间中，并且得到了著名的 Schauder 不动点定理．后来，1951 年，Nagumo 用分析方法来建立拓扑度，这给分析学家们带来了很大的方便．下面我们着手介绍拓扑度的概念，我们所采用的方法其基本思想来源于 Nagumo，并且是从有限维赋范空间的Brouwer度过渡到无穷维赋范空间的Leray-Schauder度．

## §1 有限维空间映射的拓扑度

首先介绍本章所采用的主要符号.

(i) $R^n$ 是 $n$ 维实赋范空间, $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in R^n$, 规定 $x$ 的范数为: $|x|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$;

(ii) 除非特殊声明, $\Omega$ 表示 $R^n$ 中的一个有界开集;

(iii) $C(\Omega)$ 表示所有从 $\Omega$ 到 $R^n$ 的连续映射构成的线性赋范空间, 其中, $f\in C(\bar{\Omega})$ 的范数定义为: $\|f\|=\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)|$, 这里 $f(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$, 按(i), $|f(x)|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|f_i(x)|$;

(iv) 记 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 在 $x$ 点的 Fréchet 导算子, $f'(x)$ 的表达式为

$$f'(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

对 Jacobi 矩阵 $f'(x)$, 记

$$J_f(x)=\det f'(x)=\det(f_{i,j}(x)),$$

其中 $f_{i,j}(x)=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$;

(v) $C^1(\Omega)$ 表示一个函数空间, $f\in C^1(\Omega)$ 当且仅当 $f\in C(\Omega)$, 且存在 $f$ 的扩张 $\tilde{f}$, $\varnothing(\tilde{f})$ 是 $R^n$ 中包含 $\Omega$ 的有界开集, $\tilde{f}$ 在 $\varnothing(\tilde{f})$ 上有一切连续的一阶偏导数. 定义

$$\|f\|_1=\sup_{\substack{x\in\Omega\\1\leqslant i\leqslant n}}|f_i(x)|+\sup_{\substack{x\in\Omega\\1\leqslant i\leqslant n}}|f_{i,j}(x)|$$

易验证 $C^1(\Omega)$ 构成线性赋范空间;

(vi) $C^2(\Omega)$是$C^1(\Omega)$的一个子空间，$f\in C^2(\Omega)$当且仅当$f$的扩张$\tilde{f}$在$\mathscr{D}(\tilde{f})$内具有连续的二阶偏导数；

(vii) 对于映射$f: \mathscr{D}(f)\to R^n$，定义集合

$$\operatorname{supp} f=\overline{\{x\in\mathscr{D}(f)\mid f(x)\neq\theta\}}$$

称为映射$f$的支集；记$C_0^r(\Omega)(r=1,2)$为$C^r(\bar{\Omega})$这样的子空间，$f\in C_0^r(\Omega)$当且仅当$\operatorname{supp} f\subset\Omega$；

(viii) $f\in C(\Omega)$，$p\in R^n$，记

$$f^{-1}(p)=\{x\in\Omega\mid f(x)=p\}$$

## 1·1　$C^1$映射的拓扑度

引入拓扑度的方式很多．最早是用代数拓扑学的概念引入的．后来出现了完全使用分析学的概念和方法来定义度数，而且有多种方式，但都不是直接对连续映射定义度数．本书先对$C^1$映射定义度数，然后用$C^1$映射去逼近连续映射，通过极限过程来定义连续映射的拓扑度．

**定义1·1**　设$f\in C^1(\bar{\Omega})$．若$J_f(x_0)=0$，则称$x_0$为$f$的临界点，否则的话，称$x_0$为$f$的正则点．点$p\in R^n$称为$f$的临界值，是指$f^{-1}(p)=\{x\in\bar{\Omega}\mid f(x)=p\}$至少含有一个$f$的临界点．如果$f^{-1}(p)$不含$f$的临界点，则称$p$是$f$的正则值．记$Z_f(\bar{\Omega})$或$Z_f$为$f$在$\bar{\Omega}$上临界点之全体，$f(Z_f)$为$f$在$\bar{\Omega}$上的临界值之全体．显然$Z_f$是闭集．

设$f\in C^1(\bar{\Omega})$．由Fréchet导算子的性质可知：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o((x-x_0)) \tag{1·1}$$

如果$f'(x_0)\neq\theta$，则上式表明，在正则点附近，$f(x)$可以用线性函数来逼近；倘若$f'(x_0)=\theta$，则表明在临界点没有这种性质．

**定理1·1**　设$f\in C^1(\bar{\Omega})$，$p$为$f$的正则值，则$f^{-1}(p)$为有限集．

**证明** 因 $\bar{\Omega}$ 是紧集，故只需证 $f^{-1}(p)$ 是孤立点集．否则，存在 $\{x_n\}\subset f^{-1}(p)$，$x_n\to x_0, x_n\neq x_0$，且 $x_n$ 互异．于是 $x_0\in\bar{\Omega}, f(x_0)=p$，但由(1·1)式，

$$\theta=f(x_n)-f(x_0)=f'(x_0)(x_n-x_0)+o((x_n-x_0))$$

即有

$$f'(x_0)\frac{(x_n-x_0)}{|x_n-x_0|}=\frac{o((x_n-x_0))}{|x_n-x_0|}\to\theta \quad (n\to\infty) \qquad (1\cdot2)$$

由于 $f'(x_0)u$ 是连续线性算子，故在紧集 $\{u \mid |u|=1,\ u\in R^n\}$ 上，$|f'(x_0)u|$ 必有正下界 $r$，于是对任意的 $u\in R^n$，都有

$$|f'(x_0)u|\geqslant r|u| \qquad (1\cdot3)$$

这显然与(1·2)式矛盾．

证毕

在引出拓扑度定义之前，我们先考虑两个例子．设 $p\in R^n$，我们希望对方程

$$f(x)=p \qquad (1\cdot4)$$

解的个数给予某种度量，并要求这种度量是经小扰动不变的．

**例 1** 设 $f$ 是 $(a,b)\subset E^1$ 上的连续可微实函数，由连续函数的介值定理可知，只要 $f(a)-p$ 与 $f(b)-p$ 反号，则方程(1·4)至少有一解．不过方程(1·4)在 $(a,b)$ 内解的个数经小扰动是可以变化的．例如，

$$f(x)=x^2+c=0$$

在 $(-1,1)$ 内解的个数，当 $c$ 从负变到 0，再变到正时，从 2 变到 1 再变到 0．这样，$c$ 在 0 处的微小改变引起解的个数的变化．

设 $x_0$ 是方程(1·4)的解且 $f'(x_0)\neq0$，我们赋予"符号" $\mathrm{sgn}f'(x_0)$，并把所有这种解的"符号"取代数和，记

$$\deg(f,(a,b),p)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\mathrm{sgn}f'(x),$$

则不难验证它是经小扰动不变的，而且有

$$\deg(f,(a,b),p)=\begin{cases}1, 当\ f(a)<p<f(b)\\ -1, 当\ f(b)<p<f(a)\\ 0, 当 f(a)-p\ 与 f(b)-p\ 同号\end{cases}$$

**例2** 设 $\Omega$ 是复平面 $R^2$ 中的有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 逐段光滑，$f$ 在 $\Omega$ 上解析，$p\in R^2-f(\partial\Omega)$. 由留数定理，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)-p}dz=(f(z)-p)在\ \Omega 内零点的个数$$

($m$ 重零点按 $m$ 个计). 这个积分显然与 $\Omega, f$ 在 $\partial\Omega$ 上的值和 $p$ 有关，记

$$\deg(f,\Omega,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)-p}dz$$

下面讨论此积分的几何意义. 为此作变形如下：记

$$f(z)-p=|f(z)-p|e^{i\arg(f(z)-p)}$$

则

$$\deg(f,\Omega,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}d(\ln(f(z)-p))$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}d(\ln|f(z)-p|)+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}d\arg(f(z)-p)$$

第一个积分表示 $\ln|f(z)-p|$ 在 $\partial\Omega$ 上的改变量，于是第一个积分值为零；第二个积分表示 $f(z)-p$ 的幅角当 $z$ 绕 $\partial\Omega$ 一周时的总改变量，这个改变量显然是与 $p$ 的位置有关的. 于是，当 $z$ 绕 $\partial\Omega$ 一周时，若 $f(z)-p$ 的幅角增加了 $2k\pi$，则 $\deg(f,\Omega,p)=k$. 即数值 $\deg(f,\Omega,p)$ 表示曲线 $f(\partial\Omega)$ 绕点 $p$ 的圈数. 能够证明，这个数值是经小扰动不变的，可参考文献[26], Vol. 1.

例如，设 $f(z)=2z^2+z$, $\Omega=\{z\in R^2\mid |z|<1\}$, $\partial\Omega=\{z\in R^2\mid |z|=1\}$, $f(\partial\Omega)$ 把 $R^2$ 分成三个区域 $D$、$E$、$F$，其中 $D=R^2\setminus E$ (如图1.1所示)，于是

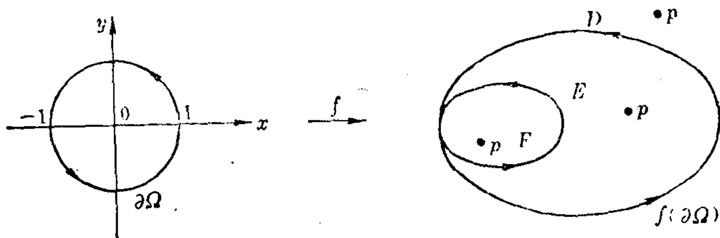



图 1.1

$$\deg(f,\Omega,p)=\begin{cases}0, & p\in D\\ 1, & p\in E\\ 2, & p\in F\end{cases}$$

**定义 1·2** 设 $f\in C^1(\bar{\Omega})$，$p\bar{\in} f(\partial\Omega)\cup f(z_f)$，则称

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\operatorname{sgn}J_f(x) \tag{1·5}$$

为 $f$ 在 $p$ 处关于 $\Omega$ 的拓扑度.

**注**

(i) 由定理 1·1 知，(1·5)式右端是有限和;

(ii) 当 $p\in f(\partial\Omega)$ 时，表明方程 $f(x)=p$ 在 $\bar{\Omega}$ 上有解，所以定义拓扑度时，条件 $p\bar{\in} f(\partial\Omega)$ 是必须的;

(iii) 显然，$\deg(f,\Omega,p)$ 是 $f$、$\Omega$ 及 $p$ 的整值函数. 我们将证明，当 $\Omega$ 固定时，对 $f$ 及 $p$ 是连续的;

(iv) 拓扑度又称为映射度或映象度.

**定理 1·2(标准性)** 设 $I$ 是恒等映射，则

$$\deg(I,\Omega,p)=1 \qquad 当 p\in\Omega.$$

**证明** $f(x)=I(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

$$J_f(x)=\begin{vmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{vmatrix}=1$$

对任意 $p\in\Omega, f^{-1}(p)=p$，由定义 1·2 知结论成立.

证毕

**定理 1·3** 设 $f\in C^1(\bar{\Omega})$ 且 $p\bar{\in} f(\partial\Omega)\cup f(Z_f)$，则存在 $\delta=\delta(p, f)>0$，使得当 $g\in C^1(\bar{\Omega})$，$\|g-f\|_1<\delta$ 时，$p\bar{\in} g(\partial\Omega)\cup g(Z_g)$ 且

$$\deg(g,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p)$$

**证明** 若 $f^{-1}(p)=\varnothing$，取 $\delta=\frac{1}{2}\rho(p, f(\bar{\Omega}))>o$，其中 $\rho(p, f(\bar{\Omega}))$ 是按本节开头定义的 $R^n$ 的范数所导出的点 $p$ 到集 $f(\bar{\Omega})$ 的距离，于是，对满足 $\|g-f\|_1<\delta$ 的 $g\in C^1(\bar{\Omega})$，必有

$$|g(x)-p|>\delta \quad (x\in\bar{\Omega})$$

即 $p\bar{\in} g(\bar{\Omega})$. 由定义 1·2 得

$$\deg(g,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p)=0$$

这就已经证明了当 $f^{-1}(p)=\varnothing$ 时，定理的结论为真.

下面设 $f^{-1}(p)\neq\varnothing$. 由定理 1·1 知，此时 $f^{-1}(p)$ 是有限集，设为

$$f^{-1}(p)=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}.$$

由于证明较长，下面分三步完成之.

(一) 首先证明，存在如此的正数 $r'$ 和 $\delta'$，使得对一切满足 $\|g-f\|_1<\delta'$ 的 $g\in C^1(\bar{\Omega})$，都有 $p\bar{\in} g(\partial\Omega)$ 并且 $\{B_i=B(a_i, r')\}$ 两两不交，$B_i\cap z_g=\varnothing$ 和 $g^{-1}(p)\cap B_i$ 是单点集 $(i=1, 2, \cdots, k)$.

因 $Z_f$ 是闭集，故可取 $r_0>0$，使得 $\bar{B}(a_i, r_0)$ 两两不交且与 $\partial\Omega\cup Z_f$ 不交. 记

$$c=\min_{1\leqslant i\leqslant k}|J_f(a_i)|,$$

显然 $c>0$. 由 $J_f$ 的连续性，可取 $r_1\leqslant r_0$，使得当 $x\in B(r_1)=\bigcup_{i=1}^{k}B(a_i, r_1)$ 时，$|J_f(x)|>\frac{2}{3}c$ · 依 $f, g\in C^1(\bar{\Omega})$ 以及 $\|\cdot\|_1$ 与 Jacobi 行

列式的定义，存在$\delta_0>0$，使得当$\|g-f\|_1<\delta_0$时，$|J_g(x)-J_f(x)|\leqslant\frac{1}{3}c(x\in\bar{\Omega})$　从而，$|J_g(x)|\geqslant\frac{1}{3}c(x\in B(r_1))$，这说明$B(a_i,r_1)\cap Z_g=\varnothing(i=1,2,\cdots,k)$．因$f(\partial\Omega)$是紧集，$p\bar{\in}f(\partial\Omega)$，故可设$\rho(p,f(\partial\Omega))=2\varepsilon_0>0$．令$\delta_1=\min\{\delta_0,\varepsilon_0\}$，则当$\|g-f\|_1<\delta_1$且$x\in\partial\Omega$时，有

$|p-g(x)|\geqslant|p-f(x)|-|f(x)-g(x)|\geqslant2\varepsilon_0-\delta_1>0$　即$p\bar{\in}g(\partial\Omega)$．

综上所述，存在正数$r_1,\delta_1$，使得当$\|g-f\|_1<\delta_1$时，$p\bar{\in}g(\partial\Omega)$且$B(a_i,r_1)\cap Z_g=\varnothing(i=1,2,\cdots,k)$．

下面利用压缩映象原理来证明，存在正数$r_i$和$\delta_i$，$r_i<r_1$，$\delta_i<\delta_1$，使得$g^{-1}(p)\cap B(a_i,r_i)$是单点集．

对任何固定的$i(1\leqslant i\leqslant k)$，为方便起见，记$a=a_i$，$x-a=z$，$h=f(a)-g(a)$，$T(z)=g(z+a)-g(a)-g'(a)z$．于是，为证明$g^{-1}(p)\cap B(a,r_i)$是单点集，只需证方程

$$g'(a)z+T(z)=h \tag{1·6}$$

在$B(\theta,r_i)$内有唯一解．由$g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x))$得

$$\frac{d}{d\theta}g_i(a+\theta z+(1-\theta)y)=\sum_{j=1}^{n}(z_j-y_j)g_{ij}(a+\theta z+(1-\theta)y),$$

式中$g_{ij}$是$g_i$对$x_j$的偏导数．由此得出

$$(T(z)-T(y))_i=\sum_{j=1}^{n}(z_j-y_j)\int_0^1[g_{ij}(a+\theta z+(1-\theta)y)-g_{ij}(a)]d\theta \tag{1·7}$$

因为当$x\in B(r_1)$时，$|J_g(x)|\geqslant\frac{1}{3}c$，故$g'(a)$是可逆线性算子．令$V=[g'(a)]^{-1}$，则$\|V\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|V(x)|>0$，这样方程(1·6)变为

$$V(h-T(z))=z. \tag{1·8}$$

记 $W(z)=V(h-T(z))$，由(1·8)，只需证明算子$W$在$B(\theta,r')$内有唯一不动点.

取 $\varepsilon, 0<\varepsilon<(3n\|V\|)^{-1}$ 据 $f\in C^1(\bar{\Omega})$，存在 $r, 0<r<r_1$，使得当$|z|\leqslant r$ 时，

$$|f_{ij}(a+\theta z+(1-\theta)y)-f_{ij}(a)|<\varepsilon \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{1·9}$$

取正数 $\delta\leqslant\min\{\delta_1, r(3\|V\|)^{-1}, (6n\|V\|)^{-1}\}$，则对 $g\in C^1(\bar{\Omega})$，当$\|g-f\|_1<\delta, \|z\|\leqslant r, \|y\|\leqslant r$ 时，由(1·7)，由(1·9)两式有

$$|(T(z)-T(y))_i|<|z-y|\sum_{i=1}^{n}(\delta+\varepsilon+\delta)$$
$$=n(2\delta+\varepsilon)|z-y|.$$

由此得

$$|T(z)-T(y)|<n(2\delta+\varepsilon)|z-y|.$$

由$W$的定义又得

$$|W(z)-W(y)|<n\|V\|(2\delta+\varepsilon)|z-y|<\frac{2}{3}|z-y| \tag{1·10}$$

$$|W(z)|<n\|V\|(2\delta+\varepsilon)r+\|V\|\delta\leqslant r \tag{1·11}$$

上列两式说明$W$是闭球$\bar{B}(\theta,r)$上的压缩自映射. 由压缩映象原理，$W$在$\bar{B}(\theta,r)$上有唯一不动点. 但由(1·11)式，不动点$z$不能位于球面上. 因此，我们已经证明了$W$在$B(\theta, r)$内有唯一不动点，即$g^{-1}(p)\cap B(a_i,r)$是单点集.

对每个$B(a_i,r)$都做同样处理，并取$\delta'\leqslant\delta_1, r'\leqslant r_1$，则对一切满足$\|g-f\|_1<\delta'$的$g\in C^1(\bar{\Omega})$，都有$p\bar{\in}g(\partial\Omega)$，$\{B(a_i,r')\}$两两不交，$B(a_i,r')\cap z_g=\varnothing$且$g^{-1}(p)\cap B(a_i,r')$是单点集($i=1,2,\cdots,k$).

(二) 其次，对第一步所找到的$r',\delta'$，我们来证明$\delta'$可缩小到某$\delta_2$，使当$\|g-f\|_1<\delta_2$时，$p\bar{\in}g(z_g)$.

记 $r_2=r'$，并令 $B(r)=\bigcup_{i=1}^{k}B(a_i,r_2)$ 和 $F=\bar{\Omega}\setminus B(r_2)$. 由 $p=f(a_i)$ 知 $p\in f(B(a_i,r_2))$. 因而 $\eta=\rho(p,f(F))>0$. 取正数 $\delta_2<\min\left\{\delta',\frac{1}{2}\eta\right\}$，当 $\|g-f\|_1<\delta_2$ 时，就有

$$|g(x)-p|>\frac{1}{2}\eta \quad (x\in F)$$

由此知 $g^{-1}(p)\subset B(r)$，即 $p\bar{\in}g(z_g)$.

（三）最后，对 $g\in C^1(\bar{\Omega})$，当 $\|g-f\|_1<\delta_2$ 时，有 $p\bar{\in}g(\partial\Omega)\cup g(z_g)$. 因而

$$\deg(g,\Omega,p)=\sum_{x\in g^{-1}(p)}J_g(x)=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sign}J_f(a_i)$$
$$=\deg(f,\Omega,p)$$

证毕

为了本章的需要，在此我们给出拓扑学中的一些概念和结果。

**定义 1·3** 设 $X$ 是拓扑空间，$x\in X$，$A\subset X$. 包含点 $x$ 的 $X$ 中所有连通子集的并集，称为 $x$ 的连通分支. 集 $A$ 的每一点在 $A$ 中的连通分支都称为 $A$ 的连通分支.

从定义看出，连通分支仍是连通集. 按集合包含关系，点 $x$ 的连通分支是包含 $x$ 的极大连通集. 设 $c(x)$ 是 $x$ 的连通分支，则对任何 $y\in c(x)$，有 $c(y)=c(x)$. 当 $y\bar{\in}c(x)$ 时，$c(x)\cap c(y)=\varnothing$.

**定义 1·4** 设 $X$ 是拓扑空间，$A\subset X$. 若对任何 $x,y\in A$，存在一个连续映射 $r:[0,1]\to X$，使得 $r(0)=x$，$r(1)=y$ 且 $r([0,1])\subset A$（此时 $r$ 称为 $A$ 中连结 $x$ 与 $y$ 两点的一条道路），则称 $A$ 是道路连通的.

道路连通集必为连通集. 一般来说，反过来不真. 但 $R^n$ 中的开集是连通的当且仅当它是道路连通的.

**定义 1·5** 设 $X$、$Y$ 是拓扑空间，$f$、$g$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的连续映射.

若存在连续映射

$$H: X\times[0,1]\to Y$$

使 $H(x,0)=f(x)$，$H(x,1)=g(x)$，则称 $f$ 与 $g$ 同伦，$H(x,t)$ 称为 $f$ 与 $g$ 之间的一个同伦映射.

以后常说 $h_t$ 是同伦，意指 $h_t(x)=H(x,t)$ 从 $X\times[0,1]$ 到 $X$ 连续.

前面我们已经对 $C^1$ 映射定义了拓扑度，但我们的目的是要对一般的 $C$ 映射定义拓扑度，因此，后面我们将逐步把拓扑度的定义推广到 $C(\bar{\Omega})$ 上去. 为了使我们最终得到的拓扑度有价值，或者说能更有效地解决实际问题，要求它必须还具有下列性质：

1° 区域可加性. 设 $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i$，$\Omega_i$ 是有界开集，且 $\Omega_i$ 互不相交，$f\in C(\bar{\Omega})$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，则有

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{i=1}^{n}\deg(f,\Omega_i,p).$$

2° 对 $f$ 的连续依赖性，即对 $f$ 的小扰动的不变性.

3° 同伦不变性. 设 $H(x,t)$ 是 $f$ 与 $g$ 之间的同伦映射，$p\overline{\in}H(\partial\Omega,t)$ $(0\leqslant t\leqslant1)$，则有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p).$$

4° 可解性. 若 $\deg(f,\Omega,p)\neq0$，那么方程 $f(x)=p$ 必在 $\Omega$ 内有解.

5° 标准性. 对恒同映射 $I$，有

$$\deg(I,\Omega,p)=1，当\ p\in\Omega$$

## 1·2 预备知识

前面已经指出，我们最终希望得到的是连续映射的拓扑度，完成这一过程的步骤是：在 $p\overline{\in}f(Z_f)$ 的限制下，定义 $C^1$ 映射的拓扑

度，这在前面已经完成：通过 $C^2$ 映射逼近 $C^1$ 映射，去掉定义 1·2 中关于 $p\overline{\in}f(Z_f)$ 的限制；再通过 $C^1$ 映射逼近连续映射，最终得到连续映射的拓扑度. 应该注意的是，在这一系列推广过程中，我们始终要求 $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，这是十分重要的 为此，我们需要下列预备知识. 不失一般性，在定理 1·4 中，假定 $R^n$ 是 $n$ 维欧氏空间

**定理 1·4**(Sard, A., 1942) 设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$，则 $f(Z_f)$ 在 $R^n$ 的 Lebesgue 测度为零.

**证明** 按 $C^1$ 映射的定义，存在 $f$ 的扩张 $\tilde{f}$，其定义域 $\mathscr{D}(\tilde{f})\supset\overline{\Omega}$，$f=(f_1,\cdots,f_n)$ 在 $\mathscr{D}(\tilde{f})$ 上连续可微. 但有界开集 $\mathscr{D}(\tilde{f})$ 可表成可数个闭立方体之并集，由测度的完全可加性，只需证明 $f(C\cap Z_f)$ 在 $R^n$ 中的 Lebesgue 测度为零，其中 $C$ 是含在 $\mathscr{D}(\tilde{f})$ 内的闭立方体. 记 $C$ 的边长为 $l$. 令

$$M=\max_{x\in C}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(f_{ij}(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1·12}$$

对任给的 $\varepsilon>0$，由于函数 $f_i$ 对 $x_j$ 的偏导数 $f_{ij}$ 在闭立方体 $C$ 上一致连续，故存在 $\delta>0$，使得当 $x,y\in C$，$\|x-y\|<\delta$ 时，有

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}(f_{ij}(x)-f_{ij}(y))^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \tag{1·13}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是欧氏距离. 选自然数 $N$，使得 $n^{\frac{1}{2}}N^{-1}l<\delta$. 把 $C$ 分成 $N^n$ 个相等的小立方体，每个边长为 $N^{-1}l$ 假设小立方体 $K$ 包含 $f$ 的临界点 $x_0$，则存在正交变换 $T:R^n\to R^n$，使得复合映射 $g=T\circ f$，$g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，$\operatorname{grad}g_n(x_0)=0$. 对每一 $x\in K$，由 Taylor 公式有

$$g_i(x)-g_i(x_0)=\sum_{j=1}^{n}g_{ij}(\xi_i)(x_j-x_j^0)\ (i=1,\cdots,n) \tag{1·14}$$

其中 $\xi_i$ 位于 $x$ 与 $x_0$ 的连线上. 由(1·12)和(1·14)及正交变换不变欧氏距离，有

$$|g_i(x)-g_i(x_0)|\leqslant Mn^{\frac{1}{2}}N^{-1}l \quad (i=1,\cdots,n-1) \tag{1·15}$$

再由(1·13), (1·14)和 $\operatorname{grad} g_n(x_0)=0$ 及正交变换不变欧氏距离，得

$$|g_n(x)-g_n(x_0)|\leqslant \varepsilon n^{\frac{1}{2}}N^{-1}l \tag{1·16}$$

因 Lebesgue 外测度经正交变换不变，及(1·15), (1·16)，有外测度 $m^*f(K)<\varepsilon M^{n-1}2^n n^{n/2}l^n N^{-n}$ 从而 $m^*f(C\cap Z_f)<\varepsilon m^{n-1}2^n n^{\frac{n}{2}} l^n$ 因为 $\varepsilon$ 是任意的，故 $mf(C\cap Z_f)=0$.

证毕

**引理 1·1** 设 $f\in C^2(\bar{\Omega})$，$A_{ij}(x)$ 为 $J_f(x)$ 中$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$的代数余子式，则有 Hadamard 恒等式

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{ij}(x)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

**证明** 不失一般性，我们仅就 $i=1$ 时证明，其它情形以此类推.

令

$$D_j=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_{j-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{j+1}}\cdots\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_{j-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j+1}}\cdots\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=(-1)^{j+1}A_{1j}$$

在 $D_j$ 中删去一列$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k},\frac{\partial f_3}{\partial x_k},\cdots,\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right)^T$，增加第一列为$\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_j\partial x_k},\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_j\partial x_k},\cdots,\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_j\partial x_k}\right)^T$，如此得到的行列式记作 $E_{jk}$，则

$$E_{jk}=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_j\partial x_k} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_{j-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{j+1}}\cdots\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{k+1}}\cdots\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_j\partial x_k} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_{j-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{j+1}}\cdots\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{k+1}}\cdots\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

由行列式的微分法得

$$\frac{\partial}{\partial x_j}D_j=\sum_{k<j}(-1)^{k-1}E_{jk}+\sum_{k>j}(-1)^{k-2}E_{jk}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\operatorname{sgn}(j-k)E_{jk}$$

因 $A_{1j}=(-1)^{j+1}D_j$，故

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\partial}{\partial x_j}D_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\operatorname{sgn}(j-k)E_{jk}$$

$$=\sum_{j,k=1}^{n}(-1)^{j+k}\operatorname{sgn}(j-k)E_{jk}$$

因为 $E_{jk}=E_{kj}$，而 $\operatorname{sgn}(j-k)=-\operatorname{sgn}(k-j)$，于是

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{1j}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}A_{1k}$$

这只能

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}A_{1j}=0$$

证毕

下面我们用 $C(X,R^m)$ 表示从 $X$ 到 $R^m$ 的连续可微函数的向量空间，$C_0^1(X,R^m)$ 表示 $C^1(X,R^m)$ 中其支集是紧集的函数的全体. 一般地取 $X=R^n$ 或 $X=\bar{\Omega}$. 显然，$C^1(\bar{\Omega},R^1)=C^1(\bar{\Omega})$.

**引理 1·2** 设 $f\in C^2(\bar{\Omega})$，$v\in C_0^1(R^n,R^n)$ 且 $\operatorname{supp}v$ 与 $f(\partial\Omega)$ 不交，则存在 $u\in C_0^1(\bar{\Omega})$，使得

$$(\operatorname{div}u)(x)=J_f(x)(\operatorname{div}v)(f(\psi))$$

**证明** 设 $A_{ji}$ 是 $J_f(x)$ 中 $f_{ji}$ 的代数余子式，定义

$$u_i(x)=\sum_{j=1}^{n}v_j(f(x))A_{ji}(x)$$

显然，$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in C_0^1(\bar{\Omega})$，

$$(\mathrm{div}u)(x)=\sum_{i,j,k=1}^{n}v_{jk}(f(x))f_{ki}(x)A_{ji}(x)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}v_j(f(x))A_{ji,i}(x)$$

根据 Laplace 展开定理，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k=1}^{n}v_{jk}(f(x))f_{ki}(x)A_{ji}(x)\\
&=\sum_{j,k=1}^{n}v_{jk}(f(x))\sum_{i=1}^{n}f_{ki}(x)A_{ji}(x)\\
&=\sum_{j,k=1}^{n}\delta_{kj}v_{jk}(f(x))J_f(x)\\
&=J_f(x)\sum_{j=1}^{n}v_{jj}(f(x))\\
&=J_f(x)(\mathrm{div}v)(f(x))
\end{aligned}$$

由 Hadamard 恒等式，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n}v_j(f(x))A_{ji,i}(x)\\
&=\sum_{j=1}^{n}v_j(f(x))\sum_{i=1}^{n}A_{ji,i}(x)\\
&=\sum_{j=1}^{n}v_j(f(x))\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ji}(x)=\theta
\end{aligned}$$

证毕

**引理 1·3** 设 $f\in C_0^1(\bar{\Omega},R^1)$，$K=\mathrm{supp}f$，若存在 $\bar{x}\in R^n$，使得

$$A=\{k+\theta\bar{x}\mid k\in K,0\leqslant\theta\leqslant1\}\subset\Omega$$

则存在 $v\in C_0^1(\bar{\Omega})$，使

$$(\mathrm{div}v)(x)=f(x)-f(x-\bar{x})$$

**证明** 由于 $K=\mathrm{supp}f\subset\Omega$，故可以扩充 $f$ 的定义域，在 $R^n\setminus\Omega$ 上定义 $f(x)=0$，这样的 $f$ 在 $R^n$ 上是连续的. 令

$$F(x)=\int_0^1 f(x-\theta\bar{x})d\theta$$

$$v(x)=F(x)\bar{x}$$

显然 $v\in C^1(\bar{\Omega},R^n)$，当 $x\bar{\in}A=\bigcup_{0\leqslant\theta\leqslant1}(K+\theta\bar{x})$ 时，$f(x-\theta\bar{x})=0$，于是 $F(x)=0$，即有 $\mathrm{supp}F\subset A$，当然亦有 $\mathrm{supp}v\subset\Omega$；故 $v\in C_0^1(\bar{\Omega})$，且

$$(\mathrm{div}v)(x)=\sum_{i=1}^n\bar{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}F(x)=\int_0^1\sum_{i=1}^n\bar{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}f(x-\theta\bar{x})d\theta$$

$$=-\int_0^1\frac{d}{d\theta}f(x-\theta\bar{x})d\theta=f(x)-f(x-\bar{x})$$

证毕

**引理 1·4** 设 $f\in C_0^1(\bar{\Omega},R^1)$，$K=\mathrm{supp}f$，$r(s)$ 为 $R^n$ 中的一条连续曲线，它使得

$$A=\{k+r(s)\mid k\in K,0\leqslant s\leqslant1\}\subset\Omega$$

则存在 $v\in C_0^1(\bar{\Omega})$，使

$$(\mathrm{div}v)(x)=f(x-r(0))-f(x-r(1))$$

**证明** 对 $s,t\in[0,1]$，我们说 $s$ 与 $t$ 等价，记作 $s\sim t$，是指

$$f(x-r(s))-f(x-r(t))$$

能够成为 $C_0^1(\bar{\Omega})$ 中某个函数的散度. 容易看出"$\sim$"是一个等价关系，于是它把[0,1]分成互不相交的等价类. 今证这样划分的等价类都是开集，于是由[0,1]的连通性，知等价类只有一个，因此 $0\sim1$，引理便得证.

取定 $s\in[0,1]$，设 $K_s=\{k+r(s)\mid k\in K\}$，$f_s(x)=f(x-r(s))$，$h(t)=r(t)-r(s)\,(t\in[0,1])$．因 $K_s\subset\Omega$ 是紧集，故 $\eta=\rho(K,\partial\Omega)>0$，由 $h(t)$ 的连续性及 $h(s)=0$ 知，存在 $\delta>0$，使当 $|t-s|<\delta$ 时，有 $|h(t)|<\frac{1}{2}\eta$，于是

$$K_s^t=\{k+\theta h(t)\mid k\in K_s,0\leqslant\theta\leqslant1\}\subset\Omega$$

由引理 1·3，存在 $v\in C_0^1(\bar{\Omega})$，使当 $|t-s|<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}v)(x)&=f_s(x)-f_s(x-h(t))\\&=f(x-r(s))-f(x-r(t))\end{aligned}$$

从而 $s$ 所在的等价类是开集.

证毕

**定理 1·5**（同胚定理） 设 $X$、$Y$ 皆是实 Banach 空间，$V$ 是 $y_0\in Y$ 的邻域，$G:V\to X$ 连续且 $F$-可微，$G'(y_0)$ 是 $Y$ 到 $X$ 上的同胚，则存在 $y_0$ 的邻域 $V_0\subset V$，使 $G|_{V_0}$ 是映到 $x_0=G(y_0)$ 的邻域 $G(V_0)$ 上的同胚.

**证明** 令 $F(x,y)=G(y)-x$，因 $G(y_0)=x_0$，故 $F(x_0,y_0)=\theta$. 于是由隐函数存在定理（第一章定理 5·2），存在 $B_X(x_0,r)\subset X$，$B_Y(y_0,\delta)\subset V$ 及连续映射 $T:B_X(x_0,r)\to B_Y(y_0,\delta)$，使得 $F(x,Tx)=\theta$，且 $Tx_0=y_0$. 令 $V_0=T(B_X(x_0,r))$，则

$$V_0\subset B_Y(y_0,\delta)\subset V$$

由 $G(Tx)=x$ 可知，$T=(G|_{V_0})^{-1}$ 是同胚，显然 $G|_{V_0}$ 把 $V_0$ 映到 $x_0=G(y_0)$ 的邻域 $G(V_0)=B_X(x_0,r)$ 上.

证毕

**注** 特别地，在 $R^n$ 中，若 $\Omega$ 是有界开集，$f\in C^1(\bar{\Omega})$，$x_0\in\Omega$ 使 $J_f(x_0)\neq0$，则由同胚定理，存在 $x_0$ 的一个邻域 $U\subset\Omega$，使 $f|_U$ 是从 $U$ 到 $y_0=f(x_0)$ 的邻域 $f(U)$ 的同胚. 由定理 1·5 的证明看出，由于 $B_X(x_0,r)$ 是连通的，$T$ 连续，则 $V_0=T(B_X(x_0,r))$ 连通. 因而

定理的结论可改述为：存在 $y_0$ 的连通邻域 $V_0$，使 $G|_{V_0}$ 是映到 $x_0=G(y_0)$ 的连通邻域 $G(V_0)$ 上的同胚映射. 更有下面的定理.

**定理 1·6** 设 $\Omega\subset R^n$ 是有界开集，$f\in C^1(\bar{\Omega})$，并且 $p\bar{\in}f(Z_f)\cup f(\partial\Omega)$，则对 $f^{-1}(p)=\{x_1, \cdots, x_m\}$，存在 $r>0$ 及 $x_i$ 的邻域 $U(x_i)$，使 $\overline{U(x_i)}\subset\Omega$，$\overline{U(x_i)}$ 两两不交，在 $\overline{U(x_i)}$ 上 $\mathrm{sgn}J_f(x)$ 取常值，且 $f|_{U(x_i)}$ 是从 $U(x_i)$ 到 $B(p,r)$ 上的同胚映射 $(i=1,\cdots,m)$.

**证明** 因 $J_f(x)\neq0$，由定理 1·5 及其注，必存在连通邻域 $U_0(x_i)$，使 $f|_{U_0(x_i)}$ 是到 $p$ 的某个连通邻域 $V_i(p)$ 的同胚. 必要时，把 $U_0(x_i)$ 适当缩小，可使 $\overline{U_0(x_i)}\cap\overline{U_0(x_j)}=\varnothing\ (i,j=1,\cdots,m,\ i\neq j)$. 因 $f\in C^1(\bar{\Omega})$，$J_f(x_i)\neq0$，故可假定 $J_f(x)$ 在 $U_0(x_i)\ (1\leqslant i\leqslant m)$ 上恒不为零. 因 $J_f(x)$ 连续，$U_0(x_i)$ 是连通邻域，故 $J_f(x)$ 在每个 $U_0(x_i)$ 上保持固定符号，从而 $\mathrm{sgn}J_f(x)$ 在 $U_0(x_i)$ 上取常值 $(i=1,\cdots,m)$.

又因 $V=\bigcap_{i=1}^{m}V_i(p)$ 仍是 $p$ 的邻域，故存在 $r>0$，使得 $B(p,r)\subset V$. 令

$$U(x_i)=f^{-1}(B(p,r))\cap U_0(x_i)\quad (i=1,\cdots,m)$$

显然，此时 $f|_{U(x_i)}$ 是从 $U(x_i)$ 到 $B(p, r)$ 上的同胚映射.

证毕

### 1·3 临界值的情形

去掉定义 1·2 中限制 $p\bar{\in}f(Z_f)$ 的方法，关键在于将 $\deg(f,\Omega,p)$ 表示成积分形式，这一工作是由 Heinz 在 1959 年作出的.

事实上，可以找到这样一族函数 $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$，满足

(i) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，$\varphi_\varepsilon: R^n\to R^1$；

(ii) $K_\varepsilon=\mathrm{supp}\varphi_\varepsilon\subset B(\theta,\varepsilon)\subset R^n$；

(iii) $\varphi_\varepsilon\in C^\infty(R^n, R^1)$ 且 $\int_{R^n}\varphi_\varepsilon(x)\,dx=1$,

其中 $C^\infty(R^n, R^1)$ 表示 $R^n$ 上无穷次可微分函数的全体，我们称这类函数 $\varphi_\varepsilon$ 为磨光函数(Mollifier).

**例3** 先取函数 $\varphi_0(x): R^n \to R^1$ 如下：

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} c\cdot\exp[-(1-|x|^2)^{-1}], & |x|<1 \\ 0, & |x|\geqslant 1 \end{cases}$$

再从 $\varphi_0$ 出发造 $\varphi_\varepsilon(x)$ 如下

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (\forall \varepsilon>0)$$

容易证明如此的 $\varphi_\varepsilon(x)$ 是磨光函数. 应该指出的是，$\varphi_0$ 中的 $c$ 是待定常数，它只与所取的空间维数有关，选取的 $c$ 应满足

$$\int_{R^n} \varphi_0(x)\,dx = 1$$

**定理 1·7** 设 $f\in C^1(\bar{\Omega})$，$P\bar{\in} f(\partial\Omega)\cup f(Z_f)$，$\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是一族磨光函数，则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(p,f)$，使得

$$\deg(f,\Omega,p) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x)-p)J_f(x)\,dx \qquad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$$

**证明** 对 $f^{-1}(p)=\varnothing$ 的情形，结论是显然的，这是因为当 $\varepsilon<\rho(p,f(\bar{\Omega}))$ 时，$\varphi_\varepsilon(f(x)-p)=0$. 设 $f^{-1}(p)=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$. 由定理 1·6，存在 $r>0$ 及 $a_i$ 的邻域 $U(a_i)\subset\Omega$，$\overline{U(a_i)}$ 两两不交，使得 $f(U(a_i))=B(p,r)$ 且 $f|_{U(a_i)}$ 是 $U(a_i)$ 到 $B(p,r)$ 上的同胚映射。适当地选择 $r$，可使 $U(a_i)$ 与 $\partial\Omega$ 不交且在 $U(a_i)$ 上，$\operatorname{sgn}J_f(x)=\operatorname{sgn}J_f(a_i)$ $(1\leqslant i\leqslant k)$. 令 $V(a_i)=U(a_i)\cap f^{-1}(B(p,r))$，于是，存在 $\alpha>0$，使得在 $\bar{\Omega}\setminus\bigcup_{i=1}^k V(a_i)$ 上，$|f(x)-p|\geqslant\alpha$（否则，可找到 $x_n\in\bar{\Omega}\setminus\bigcup_{i=1}^k V(a_i)$，$f(x_n)\to p$. 因为 $\bar{\Omega}\setminus\bigcup_{i=1}^k V(a_i)$ 是有界闭集，故存在 $x_0\in\bar{\Omega}\setminus\bigcup_{i=1}^k V(a_i)$，$f(x_0)=p$. 由 $p\bar{\in} f(\partial\Omega)$ 知 $x_0\in\Omega$. 从而 $x_0$ 即为

某 $a_i$. 这与 $x_0 \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{k} V(a_i)$ 相矛盾). 因为当 $\varepsilon > \alpha$ 时, 有

$$\int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x)-p) J_f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{sgn} J_f(a_i)$$

$$\int_{V(a_i)} \varphi_\varepsilon(f(x)-p)\, |J_f(x)|\, dx$$

由重积分变量代换法则, 并注意到 $J_f(x) = J_{f-p}(x)$. 于是有

$$\int_{V(a_i)} \varphi_\varepsilon(f(x)-p)\, |J_f(x)|\, dx = \int_{K_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y)\, dy = 1$$

其中 $K_\varepsilon = \mathrm{supp}\varphi_\varepsilon$. 最后得

$$\int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x)-p) J_f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{sgn} J_f(a_i)$$

$$= \deg(f, \Omega, p) \quad 当\ \varepsilon < \min\{\alpha, r\}$$

证毕

定理 1·7 把按有限求和式定义的拓扑度表成了积分形式, 这样, 使拓扑度的计算成为可能. 从定理 1·7 的证明中看出, $\varphi_\varepsilon$ 有很大选择余地.

下面我们考察 $p$ 的改变对拓扑度的影响.

**定理 1·8** 设 $f \in C^1(\bar{\Omega})$, $p_1, p_2$ 位于 $R^n \backslash f(\partial\Omega)$ 的同一连通分支中, 且 $p_1, p_2 \overline{\in} f(z_f)$, 则必有

$$\deg(f, \Omega, p_1) = \deg(f, \Omega, p_2)$$

**证明** (i) 首先来证明当 $f \in C^2(\bar{\Omega})$ 时, 定理成立. 因 $R^n \backslash f(\partial\Omega)$ 是开集, 故它的连通分支是道路连通的. 设 $C$ 是包含 $p_1, p_2$ 的连通分支, 则存在一条道路 $r(s)$, $r(0) = p_1$, $r(1) = p_2$ 和 $\{r(s) \mid 0 \leqslant s \leqslant 1\} \subset c \subset R^n \backslash f(\partial\Omega)$.

因 $\{r(s) \mid 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ 是紧集, 故存在 $\varepsilon_1 > 0$, 使得它的 $\varepsilon_1$-邻域

$$U = \{y \in R^n \mid \rho(r(s), y) < \varepsilon_1,\ s \in [0, 1]\} \subset R^n \backslash f(\partial\Omega)$$

显然，$U$ 是有界开集. 另一方面，由定理 1.7，可取 $\varepsilon<\varepsilon_1$ 及 $\varphi_\varepsilon$，使得

$$\deg(f,\Omega,p_i)=\int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x)-p_i)J_f(x)\,dx \quad (i=1,2)$$

因为 $K_{s\varepsilon}=\{z+r(s)\mid z\in \mathrm{supp}\varphi_\varepsilon,\ 0\leqslant s\leqslant 1\}\subset U$，故由引理 1·4，存在 $v\in C_0^1(\bar{U})$，使得

$$(\mathrm{div}v)(x)=\varphi_\varepsilon(x-p_1)-\varphi_\varepsilon(x-p_2) \tag{1·17}$$

因 $\mathrm{supp}v\subset U\subset R^n\backslash f(\partial\Omega)$，故 $\mathrm{supp}v$ 与 $f(\partial\Omega)$ 不交. 此外，将 $v$ 可扩张成 $v\in C_0^1(R^n,R^n)$. 由引理 1·2，存在 $u\in C_0^1(\bar{\Omega})$，使得

$$(\mathrm{div}u)(x)=J_f(x)(\mathrm{div}v)(f(x)) \tag{1·18}$$

从而由(1·17)，(1·18)两式得

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,p_1)&=\int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x)-p_1)J_f(x)\,dx\\&=\int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x)-p_2)J_f(x)\,dx+\int_\Omega(\mathrm{div}v)(f(x))J_f(x)dx\\&=\deg(f,\Omega,p_2)+\int_\Omega(\mathrm{div}u)(x)\,dx\end{aligned}$$

由 $\mathrm{supp}u\subset\Omega$ 及 Gauss 公式得

$$\int_\Omega(\mathrm{div}u)(x)\,dx=0$$

这样，就证明了对 $f\in C^2(\bar{\Omega})$ 定理成立.

(ii) 若 $f\in C^1(\bar{\Omega})$，则存在 $\{f_m\}\subset C^2(\bar{\Omega})$，$f_m$ 在 $C^1(\bar{\Omega})$ 内收敛于 $f$. 设 $r(s)$ 如上，则 $\delta=\rho(r,f(\partial\Omega))>0$，其中 $r$ 表示 $r([0,1])$，当 $m$ 充分大时，可使 $\|f_m-f\|<\frac{1}{2}\delta$，对 $x\in\partial\Omega$ 及 $0\leqslant S\leqslant 1$，有

$$|f_m(x)-r(s)|\geqslant|f(x)-r(s)|-|f(x)-f_m(x)|>\frac{1}{2}\delta$$

这说明 $\rho(r,f_m(\partial\Omega))\geqslant\frac{1}{2}\delta$，于是，当 $m$ 充分大时，$p_1,p_2$ 也位于 $R^n\backslash f_m(\partial\Omega)$ 的同一连通分支上. 由定理 1·3，当 $m$ 充分大时有

$$\deg(f, \Omega, p_1) = \deg(f_m, \Omega, p_1) = \deg(f_m, \Omega, p_2)$$
$$= \deg(f, \Omega, p_2)$$

证毕

细心的读者还会发现在定理 1·8 的证明中还遗留着这样一个问题，那就是：(ii) 中所说的逼近函数列是否存在？回答是肯定的。通常我们采用如下方法来构造逼近函数．仅以一维空间为例．考虑参变量积分

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(t+x)\,dt = \frac{1}{h}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t)\,dt$$

容易验证当 $f \in C^1(\bar{\Omega})$ 时，$f_h \in C^2(\bar{\Omega})$，且当 $h \to 0$ 时，$f_h$ 一致收敛于 $f$．这种逼近函数称为 Stekloff 函数．这种构造方法很容易推广到 $n$ 维空间上去．此外，也可参看书末参考文献 [9] 的第三章引理 1·5．

**定义 1·6** 设 $f \in C^1(\bar{\Omega})$，$p \bar{\in} f(\partial\Omega)$，任取 $q \bar{\in} f(Z_f)$ 满足 $|q-p| < \rho(p, f(\partial\Omega))$，规定

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega, q)$$

显然，当 $p \bar{\in} f(Z_f)$ 时，$\deg(f, \Omega, p)$ 与以前的定义是一致的．我们自然会想到有关定义合理性的另外两个问题：

1° 定义中所要求的 $q$ 是否存在？

2° 若存在这样的 $q$ 但不唯一时，$\deg(f, \Omega, p)$ 是否与 $q$ 的选择无关？

事实上，Sard 定理保证了定义 1·6 中的 $q$ 是存在的；而定理 1·8 保证了 $\deg(f, \Omega, p)$ 与 $q$ 的取法无关．可见定义是合理的．

**定义 1·7** 设 $f, g \in C^1(\bar{\Omega})$，$H: \bar{\Omega} \times [0,1] \to R^n$，使得 $H(x,0) = f$，$H(x,1) = g$；$\forall t \in (0, 1]$，$H(x, t) \in C^1(\bar{\Omega})$，且当 $s \to t$ 时，$\|h_s(x) - h_t(x)\|_1 \to 0$，其中 $h_t(x) = H(x, t)$，称如此的 $H$（或 $h_t$）为 $f$ 与 $g$ 之间的 $C^1$ 同伦．

**定理1·9** 设$f\in C^1(\bar{\Omega})$，则

(i) $\deg(f,\Omega,p)$在$R^n\backslash f(\partial\Omega)$的任一连通分支上取常值；

(ii) 对$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，存在$\varepsilon=\varepsilon(p,f)>0$，当$\|f-g\|_1<\varepsilon$时，有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

(iii) 设$H(x,t)$是$f$与$g$之间的$C^1$同伦，而$p\overline{\in}H(\partial\Omega,t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

**证明** (i) 设$C$是$R^n-f(\partial\Omega)$的一个连通分支，$p_1,p_2\in C$，取$q_i\overline{\in}f(Z_f)$满足$|q_i-p_i|<\rho(p_i,f(\partial\Omega))$ $(i=1,2)$，此时，显然$q_1$和$q_2$都在$C$中，于是

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,p_1)&=\deg(f,\Omega,q_1)=\deg(f,\Omega,q_2)\\&=\deg(f,\Omega,p_2)\end{aligned}$$

(ii) 设$\eta=\rho(p,f(\partial\Omega))$，由Sard定理，存在$q$，使得$|q-p|<\frac{1}{2}\eta$，$q\overline{\in}f(Z_f)$；再由定理1·3，存在$\varepsilon<\frac{1}{2}\eta$，使当$\|f-g\|_1<\varepsilon$时，$q\overline{\in}g(Z_g)\cup g(\partial\Omega)$，且

$$\deg(f,\Omega,q)=\deg(g,\Omega,q)$$

因当$x\in\partial\Omega$时，有

$$|p-g(x)|\geqslant|p-f(x)|-|f(x)-g(x)|>\frac{1}{2}\eta$$

于是$p$，$q\overline{\in}g(\partial\Omega)$，且位于$R^n\backslash g(\partial\Omega)$的同一连通分支上，从而由(i)得

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,p)&=\deg(f,\Omega,q)=\deg(g,\Omega,q)\\&=\deg(g,\Omega,p)\end{aligned}$$

(iii) 由已知条件，$\deg(h_t,\Omega,p)$对一切$t\in[0,1]$有定义，此外，据定义1·7及(ii)，$\deg(h_t,\Omega,p)$在$[0,1]$上连续，但这是个整值函数，故必取常值，更有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

**证毕**

### 1·4 连续映射的拓扑度

**定义 1·8** 设 $f\in C(\bar{\Omega})$，$p\bar{\in}f(\partial\Omega)$，任取 $C^1(\bar{\Omega})$ 中满足 $\|f-g\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$ 的 $g$，规定

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

连续映射的拓扑度也称为 Brouwer 度. 下面考虑定义的合理性.

容易看出，定义 1·8 中所要求的 $g$ 是存在的，例如我们可以取相应的 Stekloff 函数 $g$ 来逼近 $f\in C(\bar{\Omega})$. 下面证明，$\deg(f,\Omega,p)$ 与 $g$ 的取法无关.

事实上，若 $g_i\in C^1(\bar{\Omega})$ 都满足 $\|g_i-f\|<\eta=\rho(p,\ f(\partial\Omega))$ $(i=1,2)$，考虑 $C^1$ 同伦

$$h_t(x)=tg_1(x)+(1-t)g_2(x)\quad(x\in\bar{\Omega},t\in[0,1])$$

由于
$$\|h_t-f\|\leqslant t\|g_1-f\|+(1-t)\|g_2-f\|<\eta$$

因此，当 $x\in\partial\Omega$ 时，

$$|p-h_t(x)|\geqslant|p-f(x)|-|f(x)-h_t(x)|>0\quad(t\in[0,1])$$

即 $p\bar{\in}h_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant1)$，据定理 1·9 之(iii)有

$$\deg(g_1,\Omega,p)=\deg(g_2,\Omega,p)$$

于是 $\deg(f,\Omega,p)$ 与 $g$ 的取法无关.

**注** 若 $p\bar{\in}f(\partial\Omega)$，则 $\theta\bar{\in}(f-p)(\partial\Omega)$. 按定义1·8，可取 $g\in C^1(\bar{\Omega})$，$\|f-g\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$，使得 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$. 显然，也有 $g-p\in C^1(\bar{\Omega})$ 和 $\deg(f-p,\Omega,\theta)=\deg(g-p,\Omega,\theta)$. 又由 $C^1$ 映射拓扑度的性质，$\deg(g,\Omega,p)=\deg(g-p,\Omega,\theta)$，所以我们得到

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-p,\Omega,\theta)$$

**定理 1·10** 在定义 1·8 中，可找到 $g\in C^1(\bar{\Omega})$，使 $p\overline{\in} g(Z_g)$.

**证明** 设 $\eta=\rho(p,f(\partial\Omega))$，取 $h\in C^1(\bar{\Omega})$，满足 $\|f-h\|<\frac{1}{2}\eta$，于是 $\rho(p,\ h(\partial\Omega))>\frac{1}{2}\eta$，再取 $q\in R^n$，使 $\|q-p\|<\frac{1}{2}\eta$，$q\overline{\in} h(Z_h)$. 令

$$g(x)=h(x)+p-q$$

则有
$$\|f-g\|\leqslant\|f-h\|+\|p-q\|<\eta$$

因为 $g(x)=p$ 当且仅当 $h(x)=q$ 且 $J_g(x)=J_h(x)$，故 $p\overline{\in} g(Z_g)$.

证毕

至此，我们在特定的 $R^n$ 空间对一般的连续映射定义了拓扑度. 现在，我们从此出发给出一般的 $n$ 维实线性赋范空间中连续映射的拓扑度.

**定义 1·9** 设 $X$ 是 $n$ 维实线性赋范空间，$\Omega\subset X$ 是有界开集，$f\in C(\bar{\Omega})$，$p\in X\backslash f(\partial\Omega)$. 任取 $X$ 的一个基底 $e_1,\cdots,e_n$. 这样，$X$ 中的任何 $X$，可唯一表成 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$，其中诸 $\alpha_i$ 是实数. 作映射 $h$: $X\to R^n$ 如下：令 $hx=y$，$y=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in R^n$. 显然，$h$ 是 $X$ 与 $R^n$ 的线性同胚(但未必等距). 于是，$h(\Omega)$ 是 $R^n$ 中的有界开集且 $\overline{h(\Omega)}=h(\bar{\Omega})$，$h(\partial\Omega)=\partial h(\Omega)$. 作映射 $F=hfh^{-1}$，则 $F$ 是 $R^n$ 到 $R^n$ 中的映射，$F\in C(\overline{h(\Omega)})$ 且 $h(p)\in R^n\backslash F(\partial h(\Omega))$. 规定

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(F,h(\Omega),h(p)) \tag{1·19}$$

定义 1·9 合理性的证明：

只要我们证明了 $\deg(F,h(\Omega),h(p))$ 不依赖于基底 $e_1,\cdots,e_n$ 的选择，也就证明(1·19)式是合理的. 设 $e_1',\cdots,e_n'$ 是 $X$ 的另一基底，设 $x=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i'$. 这样，就得到两个映射 $k$ 和 $G$，$k$ 是 $X$ 与 $R^n$ 的线性同胚，$kx=z$，$z=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in R^n$，$G=kfk^{-1}$: $\overline{k(\Omega)}\subset R^n\to R^n$. 这样，为证明(1·19)式的合理性，只需证明

$$\deg(F,h(\Omega),h(p))=\deg(G,k(\Omega),k(p)) \qquad (1\cdot 20)$$

就可以了. 因为 $e_1,\cdots,e_n$ 与 $e'_1,\cdots,e'_n$ 都是 $X$ 的基底, 故 $e_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'_i\ (j=1,\cdots,n)$. 记 $A=(a_{ij})$, 则 $\det A=|a_{ij}|\neq 0$. 由

$$x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j\right)e'_i$$

得 $\beta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j(j=1,\cdots,n)$, 即 $z=Ay$. 从而, $\forall x\in X$, 有 $kx=z=Ay=Ahx$, 故 $k=Ah$, $k(\overline{\Omega})=Ah(\overline{\Omega})$. 由此又得

$$G=kfk^{-1}=Ahfh^{-1}A^{-1}=AFA^{-1} \qquad (1\cdot 21)$$

下面的证明分两步:

(i) 设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$. 因为 $h$ 是 $X$ 到 $R^n$ 上的线性同胚, 故 $h\in C^1(X)$, $h^{-1}\in C^1(X)$. 从而也有 $F\in C^1(R^n)$. 易知, 当 $z=Ay$ 时, 有

$$F(y)=h(p)\Longleftrightarrow G(z)=k(p) \qquad (1\cdot 22)$$

由(1. 21)式, 链锁规则和线性算子的 $F$- 导算子仍是该算子, 得

$$J_G(z)=\det A J_F(A^{-1}z)\det A^{-1}=J_F(y) \qquad (1\cdot 23)$$

记 $z_F(h(\Omega))$ 和 $z_G(k(\Omega))$ 分别是 $F$ 在 $h(\Omega)$ 上和 $G$ 在 $k(\Omega)$ 上临界点的全体. 由(1·22), (1·23)两式得

$$h(p)\overline{\in}F(z_F)\Longleftrightarrow k(p)\overline{\in}G(z_G) \qquad (1\cdot 24)$$

按 $C^1$ 映射拓扑度的定义, 有

$$\deg(F,h(\Omega),h(p))=\sum_{y\in F^{-1}(h(p))}\operatorname{sgn}J_F(y) \qquad (1\cdot 25)$$

$$\deg(G,k(\Omega),k(p))=\sum_{z\in G^{-1}(k(p))}\operatorname{sgn}J_G(z) \qquad (1\cdot 26)$$

最后由(1·23)-(1·26)式知, (1·20)式成立.

对 $h(p)\in F(z_F)$ 和 $k(p)\in G(z_G)$ 的情形, 由(1·25), (1·26), 定

理1·7及定理1·8知 定义1.6适用,即(1·20)式成立.

(ii) 设$f\in C(\overline{\Omega})$, $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$. 这样, $F\in C(h(\overline{\Omega}))$, $G\in C(k(\overline{\Omega}))$, $h(p)\overline{\in}\partial h(\Omega)$, $k(p)\overline{\in}\partial k(\Omega)$. 取$C^1(\overline{h(\Omega)})$中满足$\|F-F_1\|<\rho(h(p),F(\partial h(\Omega)))$的适当的$F_1$, 使得$\|G-G_1\|<\rho(k(p),G(\partial k(\Omega)))$, 其中$G_1=AF_1A^{-1}\in C^1(\overline{k(\Omega)})$, 按定义1·8, 有

$$\deg(F,h(\Omega),h(p))=\deg(F_1,h(\Omega),h(p)),$$

$$\deg(G,k(\Omega),k(p))=\deg(G_1,k(\Omega),k(p)).$$

因为对$F_1$, $G_1$已经证明(1·20)式成立,因此由上列两式可知,对$F$, $G$, (1·20)式也成立. 定义1·9的合理性证完.

## §2 有限维空间映射拓扑度的性质

### 2·1 $f$与$p$的改变

定理1·2表明把恒同映射考虑作$C^1$映射时,标准性成立. 现在由连续映射拓扑度的定义,显然标准性

$$\deg(I,\Omega,p)=1 \quad 当\ p\in\Omega$$

仍成立. 下面来讨论当改变$f$与$p$时,对拓扑度的影响.

**定理2·1** (Kronecker存在定理) 设$f\in C(\overline{\Omega})$, $\deg(f,\Omega,p)\neq 0$, 则存在$x_0\in\Omega$, 使$f(x_0)=p$.

**证明** 若$p\overline{\in}f(\overline{\Omega})$取, $g\in C^1(\overline{\Omega})$, 使$\|f-g\|<\rho(p,f(\overline{\Omega}))$, 于是$p\overline{\in}g(\overline{\Omega})$, 由拓扑度定义, $\deg(g,\Omega,p)=0$, 按定义1·8则有

$$\deg(f,\Omega,p)=0$$

这与假设矛盾. 于是, $p\in f(\overline{\Omega})$. 但因$\deg(f,\Omega,p)$有定义, 必然$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$, 故$p\in f(\Omega)$.

证毕

**定理2·2** (i) 设$f$, $g\in C(\overline{\Omega})$, $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$, $\|f-g\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$, 则

$$\deg(g,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p);$$

**(ii)** **(同伦不变性)** 设 $h_t$ 是同伦，$p\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，则 $\deg(h_t,\Omega,p)$ 与 $t\in[0,1]$ 无关.

**证明** (i) 由已知条件知 $p\overline{\in}g(\partial\Omega)$，故 $\deg(g,\Omega,p)$ 有意义. 取 $h\in C^1(\overline{\Omega})$，使

$$\|h-g\|+\|g-f\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$$

由定义 1·8 得

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(h,\Omega,p) \tag{2·1}$$

因

$$\rho(p,f(\partial\Omega))\leqslant\rho(p,g(\partial\Omega))+\|f-g\|$$

故

$$\|h-g\|<\rho(p,g(\partial\Omega))$$

再由定义 1·8 得

$$\deg(h,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p) \tag{2·2}$$

结合(2·1)、(2·2)两式便得到结论.

(ii) 由假定，对所有的 $t\in[0,1]$，$\deg(h_t,\Omega,p)$ 都有意义，根据(i)，$\deg(h_t,\Omega,p)$ 对 $t$ 连续，取整值，故只能取常值.

证毕

**定理 2·3** 设 $f\in C(\overline{\Omega})$，则 $\deg(f,\Omega,p)$ 在 $R^n\backslash f(\partial\Omega)$ 的连通分支上取常值.

**证明** 设 $C$ 为 $R^n\backslash f(\partial\Omega)$ 的一个连通分支，$p_1,p_2\in C$，就有连接 $p_1,p_2$ 的道路 $r(s)$，$r([0,1])\subset C$，取 $g\in C^1(\overline{\Omega})$，使 $\|f-g\|<\rho(r([0,1]),f(\partial\Omega))$，则

$$\deg(f,\Omega,p_i)=\deg(g,\Omega,p_i)\quad(i=1,2) \tag{2·3}$$

由于 $p_1,p_2$ 位于 $R^n\backslash g(\partial\Omega)$ 的同一连通分支中，故

$$\deg(g,\Omega,p_1)=\deg(g,\Omega,p_2) \tag{2·4}$$

由(2·3)，(2·4)两式得

$$\deg(f,\Omega,p_1)=\deg(f,\Omega,p_2)$$

证毕

**定理 2·4**(边界值性质)　设 $f,g\in C(\overline{\Omega})$，且 $f(x)=g(x)$ $(x\in\partial\Omega)$，$p\overline{\in}f(\partial\Omega)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

**证明**　考虑同伦

$$h_t(x)=tf(x)+(1-t)g(x)\quad(x\in\overline{\Omega},0\leqslant t\leqslant 1)$$

显然 $p\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，由同伦不变性有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

证毕

**定理 2·5** (Poincare-Bohl)　设 $f,g\in C(\overline{\Omega})$，且对一切 $x\in\partial\Omega$，$p$ 不在连接 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的线段上，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

**证明**　与定理 2·4 之证明完全相同.

显然，定理 2·4 是定理 2·5 的特例.

**推论 1**　设 $f\in C(\overline{\Omega})$，$\theta\in\Omega$，

(i) 对 $x\in\partial\Omega$，$x$ 与 $f(x)$ 不反向(即原点不在 $x$ 与 $f(x)$ 的所连线段上)，则有

$$\deg(f,\Omega,\theta)=1$$

(ii) 特别有如下的锐角原理：

对 $x\in\partial\Omega$，在欧氏空间中，$x$ 与 $f(x)$ 相交成锐角，即 $(x,f(x))>0$，则有

$$\deg(f,\Omega,\theta)=1$$

**证明**　(i) 在定理 2·5 中取 $p=\theta$，$g(x)=x$，则有

$$\deg(f,\Omega,\theta)=\deg(I,\Omega,\theta)=1$$

(ii) 若存在 $\lambda_0\in(0,1)$ 及 $x_0\in\partial\Omega$，使

$$\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0) f(x_0) = \theta$$

则有

$$\lambda_0 (x_0, x_0) + (1-\lambda_0)(f(x_0), x_0) = \theta$$

这显然与假定矛盾，故对任意的 $x \in \partial\Omega$，$\theta$ 不在 $x$ 与 $f(x)$ 的所连线段上，由(i)便得结论.

证毕

**定理 2·6** 设 $f \in C(\overline{\Omega})$，$p \overline{\in} f(\partial\Omega)$，则对任何 $q \in R^n$，都有

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f-q, \Omega, p-q)$$

其中 $f-q$ 表示映射 $x \longmapsto f(x)-q$.

**证明** 按定理 1·7 上面的注解，$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f-p, \Omega, \theta)$. 因为 $p \overline{\in} f(\partial\Omega)$，所以 $p-q \overline{\in} (f-q)(\partial\Omega)$. 于是，

$$\begin{aligned}\deg(f, \Omega, p) &= \deg(f-p, \Omega, \theta)\\ &= \deg(f-p+(p-q), \Omega, p-q)\\ &= \deg(f-q, \Omega, p-q)\end{aligned}$$

证毕

更一般地，有

**定理 2·7** 设 $h_t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 是在 $C(\overline{\Omega})$ 内的同伦，$p_t$ 是 $R^n$ 中的一条连通道路，$p_t \overline{\in} h_t(\partial\Omega)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$，则 $\deg(h_t, \Omega, p_t)$ 与 $t$ 无关.

**证明** 考虑同伦

$$k_t(x) = h_t(x) - p_t \quad (x \in \overline{\Omega}, 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

由定理 2·6 有

$$\deg(k_t, \Omega, \theta) = \deg(h_t, \Omega, p_t)$$

而由同伦不变性，$\deg(k_t, \Omega, \theta)$ 与 $t$ 无关，故 $\deg(h_t, \Omega, p_t)$ 亦与 $t$ 无关.

证毕

## 2·2 区域 $\Omega$ 的改变

**定理 2·8** 设 $f\in C(\overline{\Omega})$, $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$.

(i)(区域可加性) 若 $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i$, $\Omega_i$ 是有界开集且互不相交,则

$$\deg(f,\Omega,p)=\sum_{i=1}^{n}\deg(f,\Omega_i,p);$$

(ii)(切除性质) 若 $K\subset\overline{\Omega}$ 是闭集, $p\overline{\in}f(K)$, 则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega\backslash K,p)$$

**证明** (i) 先证对每个 $i$, $\partial\Omega_i\subset\partial\Omega$. 显然 $\partial\Omega_i\subset\overline{\Omega}_i\subset\overline{\Omega}$, 若有 $y\in\partial\Omega_i\backslash\partial\Omega$, 那么 $y$ 必在某个 $\Omega_j$ 之中, 于是, 存在 $y$ 的一个邻域 $U\subset\Omega_j$, 因 $i\neq j$, 故 $U\cap\Omega_i=\phi$, 这显然与 $y\in\partial\Omega_i$ 矛盾, 从而 $\partial\Omega_i\subset\partial\Omega$.

取 $g\in C^1(\overline{\Omega})$, 使 $p\overline{\in}g(Z_g)$, 且 $\|f-g\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$, 由定理 1·10 这是可以办到的. 因 $\partial\Omega_i\subset\partial\Omega$, 故 $p\overline{\in}g(\partial\Omega_i)$, 且 $|f(x)-g(x)|<\rho(p,f(\partial\Omega_i))\quad(x\in\overline{\Omega}_i)$, 于是

$$\deg(f,\Omega_i,p)=\deg(g,\Omega_i,p)\quad(i=1,\cdots,n)$$

由此得

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,p)&=\deg(g,\Omega,p)=\sum_{x\in g^{-1}(p)}\operatorname{sgn}J_g(x)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in g^{-1}(p)\cap\Omega_i}\operatorname{sgn}J_g(x)\\&=\sum_{i=1}^{n}\deg(g,\Omega_i,p)\\&=\sum_{i=1}^{n}\deg(f,\Omega_i,p)\end{aligned}$$

(ii) 取 $g\in C^1(\overline{\Omega})$ 使 $p\overline{\in}g(Z_g)$, 且 $\|f-g\|<\rho(p,f(\partial\Omega))$. 因

$K$紧，故 $\rho(p,\ f(K))>0$，可取 $g$，使得还满足 $\|f-g\|<\rho(p,$ $f(K))$，于是$p\overline{\in}g(K)$，且

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)=\sum_{x\in g^{-1}(p)}\operatorname{sgn}J_g(x)$$

$$=\sum_{x\in g^{-1}(p)\cap(\Omega\setminus K)}\operatorname{sgn}J_g(x)=\deg(g,\Omega\setminus K,p)$$

最后，由 $g$ 的取法知，$\|f-g\|<\rho(p,f(\partial(\Omega\setminus K))$，故

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega\setminus K,p)$$
$$=\deg(f,\Omega\setminus K,p)$$

证毕

下面我们要通过切除性质引出方程 $f(x)=p\quad(p\overline{\in}f(\partial\Omega))$的孤立解指数的概念. 当 $n=2$ 时，即在 $R^2$ 中，这个指数称为 Poincare 指数，它在常微分方程定性理论中常常用到.

设 $f\in C(\overline{\Omega})$，$x_0$ 称为方程 $f(x)=p$ 的孤立解是指：$f(x_0)=p$，且存在 $x_0$ 的一个邻域，其中没有异于 $x_0$ 的解.

设 $x_0$ 是方程 $f(x)=p$ 的在$\Omega$上的孤立解，$U_1$ 与 $U_2$ 是 $x_0$ 的两个邻域，方程在 $\overline{U}_i$ 中无其它异于 $x_0$ 的解$(i=1,2)$，那么是否有 $\deg(f,U_1,p)=\deg(f,U_2,p)$呢？

记 $\mathscr{U}=\{U|U$ 是 $x_0$ 的邻域，且 $\overline{U}$ 中除 $x_0$ 外，无 $f(x)=p$ 的另外解$\}$，则 $U_1,U_2\in\mathscr{U}$，$U_1\cup U_2\in\mathscr{U}$. 因 $\partial(U_1\cup U_2)\subset(\partial U_1)\cup(\partial U_2)$，故$p\overline{\in}f(\partial U_1)\cup f(\partial U_2)$，$p\overline{\in}f(\partial(U_1\cup U_2))$，于是，$\deg(f,U_1,p)$，$\deg(f,U_2,p)$，$\deg(f,U_1\cup U_2,p)$皆有意义.

不难验证，$U_1=(U_1\cup U_2)-\overline{(U_2-U_1)}$，$U_2=(U_1\cup U_2)-\overline{(U_1-U_2)}$，据切除性质有

$$\deg(f,U_1,p)=\deg(f,U_1\cup U_2,p)$$
$$=\deg(f,U_2,p)$$

可见，$\deg(f,U,p)$在 $\mathscr{U}$ 上取常值.

**定义 2·1** 设 $x_0$ 是方程 $f(x)=p$ 的孤立解,定义 $f$ 在 $x_0$ 处对 $p$ 的指数为

$$\text{index}(f, x_0, p)=\deg(f, U, p)$$

其中 $U\in\mathscr{U}$. 特别当 $n=2$ 时,称为 Poincaré 指数.

下列结果在分歧理论中是很有用的.

**定理 2·9** (i) 设 $f\in C(\overline{\Omega})$, $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$, 且 $f^{-1}(p)$ 有限,则有如下指数公式

$$\deg(f, \Omega, p)=\sum_{a\in f^{-1}(p)}\text{index}(f, a, p)$$

(ii) 设 $f\in C^1(\overline{\Omega})$, $a\in f^{-1}(p)$, 且 $J_f(a)\neq 0$, 则

$$\text{index}(f, a, p)=(-1)^v$$

其中 $v$ 为 $f'(a)$ 的负本征值的数目($m$ 重本征值按 $m$ 个本征值计)。

**证明** (i) 设 $f^{-1}(p)=\{a_1, \cdots, a_k\}$, 取 $a_i$ 的邻域 $N_i$, 使得当 $i\neq j$ 时, $\overline{N}_i\cap\overline{N}_j=\phi$, 于是

$$\text{index}(f, a_i, p)=\deg(f, N_i, p)$$

设 $\Omega_1=\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{k}N_i$, 则 $\bigcup_{i=1}^{k}N_i=\Omega\setminus\overline{\Omega}_1$, 由切除性质及区域可加性有

$$\begin{aligned}\deg(f, \Omega, p)&=\deg(f, \Omega\setminus\overline{\Omega}_1, p)\\&=\sum_{i=1}^{k}\deg(f, N_i, p)\\&=\sum_{i=1}^{k}\text{index}(f, a_i, p).\end{aligned}$$

(ii) 由假设知,有界线性算子 $f'(a)$ 是可逆的, 因而 $a$ 为方程 $f(x)=p$ 的孤立解,于是 $\text{index}(f, a, p)$ 有意义.

设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $f'(a)$ 的本征值,即

$$\det(f'(a)-\lambda I)=(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

则 $J_f(a)=\lambda_1\cdots\lambda_n$，因 $f'(a)$ 是实矩阵，故其复本征值以共轭对形式出现，因此

$$\operatorname{sgn} J_f(a)=(-1)^v,$$

其中 $v$ 是负本征值的数目．最后，设 $U\in\mathscr{U}$，则

$$\begin{aligned}\operatorname{index}(f,a,p)&=\deg(f,U,p)\\&=\operatorname{sgn} J_f(a)=(-1)^v\end{aligned}$$

证毕

## 2·3 乘积定理与简化定理

我们首先给出表达复合映射 $g\circ f$ 的拓扑度和 $f$ 与 $g$ 的拓扑度之间关系的乘积定理．设 $f\in C(\overline{\Omega})$，$M$ 是 $R^n$ 中的有界开集，则 $\Delta=M\backslash f(\partial\Omega)$ 也是有界开集．由于 $\Delta$ 的每个连通分支都含有有理坐标点，且各分支两两不交，故 $\Delta$ 至多有可列个连通分支，设为 $\Delta_j$ $(j=1,2,\cdots)$．

**定理 2·10**（乘积定理） 设 $f\in C(\overline{\Omega})$，$f(\overline{\Omega})\subset M$，$M$ 为有界开集．记 $\Delta=M\backslash f(\partial\Omega)$，$\Delta$ 的连通分支为 $\Delta_j$ $(j=1,2,\cdots)$．又设 $g\in C(\overline{M})$，$p\overline{\in} g(f(\partial\Omega))\cup g(\partial M)$，则有乘积公式

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\sum_j\deg(g,\Delta_j,p)\deg(f,\Omega,\Delta_j) \tag{2·5}$$

其中规定 $\deg(f,\Omega,\Delta_j)=\deg(f,\Omega,y)$，由拓扑度在连通分支上的性质可知，它与 $\Delta_j$ 中 $y$ 的选择无关．

**证明** 因 $p\overline{\in} g(f(\partial\Omega))$，故对 $y\in R=g^{-1}(p)$，必有 $y\overline{\in} f(\partial\Omega)$，于是 $y$ 必属于某个 $\Delta j$，这表明紧集 $R$ 被 $\{\Delta_j\}$ 所覆盖，故存在有限个 $\Delta_j$ 覆盖了 $R$．由 Kronecker 存在定理，(2·5)式右端是有限和．

下面分几个步骤来证明(2·5)式成立．

(i) 由 $\partial\Delta\subset\partial M\cup f(\partial\Omega)$，有 $g(\partial\Delta)\subset g(f(\partial\Omega))\cup g(\partial M)$，由假设知，$p\overline{\in} g(\partial\Delta)$；又因 $\partial\Delta_j\subset\partial\Delta$，故对一切 $j$，$\deg(g,\Delta_j,p)$ 都有

意义.

(ii) 设 $W_k=\{y\in M\,|\,\deg(f,\Omega,y)=k\}$，由拓扑度性质知，当 $y$ 作微小变化时，拓扑度不变，故 $W_k$ 是开集. 又因为

$$W_k=\bigcup\{\Delta_j\,|\,\deg(f,\Omega,\Delta_j)=K\} \tag{2·6}$$

故 $R$ 可由有限个 $W_k$ 覆盖，于是

$$\begin{aligned}&\sum_j \deg(g,\Delta_j,p)\deg(f,\Omega,\Delta_j)\\ =&\sum_k \sum_{\{j|\Delta_j\subset W_k\}} \deg(g,\Delta_j,p)\deg(f,\Omega,\Delta_j)\\ =&\sum_k k\deg(g,W_k,p)\end{aligned} \tag{2·7}$$

(iii) 因 $p\overline{\in} g(f(\partial\Omega))$，故 $R$ 与 $f(\partial\Omega)$ 是互不相交的紧集，可取 $\hat{f}\in C^1(\overline{\Omega})$ 使

$$|\hat{f}(x)-f(x)|<\rho(p,\ f(\partial\Omega))\quad (x\in\overline{\Omega}) \tag{2·8}$$

则

$$\deg(f,\Omega,y)=\deg(\hat{f},\Omega,y)\quad (y\in R) \tag{2·9}$$

设 $\hat{W}_k=\{y\in M\,|\,\deg(\hat{f},\Omega,y)=k\}$，$\hat{W}_k$ 亦为开集，由于 $\{W_k\}$，$\{\hat{W}_k\}$ 为两族互不相交的开集，故当 $y\in R$ 时，$\deg(f,\Omega,y)$ 与 $\deg(\hat{f},\Omega,y)$ 均有定义，因而对一切 $k$ 都有

$$R\cap\partial W_k=\varnothing,\ \ R\cap\partial\hat{W}_k=\varnothing$$

由(2·9)式知

$$R\cap W_k=R\cap\hat{W}_k$$

从而，$R\cap(W_k\cup\hat{W}_k)\subset W_k\cap\hat{W}_k$. 由切除性质有

$$\begin{aligned}\deg(g,W_k,p)&=\deg(g,W_k\cap\hat{W}_k,p)\\ &=\deg(g,\hat{W}_k,p)\end{aligned} \tag{2·10}$$

(iv) 用证明定理1·10的同样方法，可取 $\hat{g}\in C^1(\overline{M})$，使 $p\overline{\in}(\hat{g}\circ\hat{f})(Z_{\hat{g}\circ\hat{f}})$，且

$$|\hat{g}(x)-g(x)|<\rho(p,g(\partial M)\cup(g\circ\hat{f})(\partial\Omega))\quad (x\in\overline{M}) \tag{2·11}$$

特别有 $p\overline{\in}(\hat{g}\circ\hat{f})(\partial\Omega)$.

因 $\partial\hat{W}_k\subset\hat{f}(\partial\Omega)\cup\partial M$，则有 $g(\partial\hat{W}_k)\subset g\circ\hat{f}(\partial\Omega)\cup g(\partial M)$，从而由(2·11)式知

$$|\hat{g}(x)-g(x)|<\rho(p,g(\partial\hat{W}_k))\quad(x\in\overline{M}).$$

因此 $p\overline{\in}\hat{g}(\partial\hat{W}_k)$，且

$$\deg(g,\hat{W}_k,p)=\deg(\hat{g},\hat{W}_k,p)\tag{2·12}$$

**注** 因 $f(\overline{\Omega})\subset M$，故 $\rho(f(\overline{\Omega}),\partial M)>0$，从而还可以进一步要求 $\hat{f}$ 满足

$$|\hat{f}(x)-f(x)|<\rho(f(\overline{\Omega}),\partial M)\quad(x\in\overline{\Omega})$$

这样有，$\hat{f}(\overline{\Omega})\subset M$，因而 $g\circ\hat{f}$ 与 $\hat{g}\circ\hat{f}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上有定义.

(v) 现在证明 $g\circ f$ 与 $\hat{g}\circ\hat{f}$ 的拓扑度相同.

令

$$f_t(x)=(1-t)f(x)+t\hat{f}(x)\quad(x\in\overline{\Omega},0\leqslant t\leqslant 1)$$

考虑同伦 $g\circ f_t$，由(2·8)式知，对任何 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$，都有 $\rho(R,f_t(\partial\Omega))>0$，故 $p\overline{\in}g\circ f_t(\partial\Omega)$. 于是，据同伦不变性得

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\deg(g\circ\hat{f},\Omega,p)\tag{2·13}$$

再考虑同伦

$$g_t\circ\hat{f}=((1-t)g+t\hat{g})\circ\hat{f}\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

易证 $p\overline{\in}g_t\circ\hat{f}(\partial\Omega)$，由同伦不变性得

$$\deg(g\circ\hat{f},\Omega,p)=\deg(\hat{g}\circ\hat{f},\Omega,p)\tag{2·14}$$

综合(2·13)，(2·14)两式得

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\deg(\hat{g}\circ\hat{f},\Omega,p)\tag{2·15}$$

(vi) 联合考虑(2·7)，(2·10)，(2·12)，(2·15)式，若能证明

$$\sum_k k\deg(\hat{g},\hat{W}_k,p)=\deg(\hat{g}\circ\hat{f},\Omega,p)\tag{2·16}$$

便完成了定理的证明. 下证(2·16)式成立.

由 $\hat{f},\hat{g}$ 的取法知，$\hat{f}\in C^1(\overline{\Omega})$，$\hat{g}\in C^1(\overline{M})$，$p\overline{\in}\hat{g}\circ\hat{f}(Z_{\hat{g}\circ\hat{f}})$，且

$p\overline{\in}\hat{g}\circ\hat{f}(\partial\Omega)\cup\hat{g}(\partial\hat{W}_k)$. 为简单计，在下面证明中省略符号"∧"。

由链锁规则得

$$
\begin{aligned}
\deg(g\circ f,\Omega,p) &= \sum_{x\in f^{-1}\circ g^{-1}(p)} \operatorname{sgn}[J_g(f(x))J_f(x)] \\
&= \sum_{x\in f^{-1}\circ g^{-1}(p)} \operatorname{sgn}J_g(f(x))\operatorname{sgn}J_f(x) \\
&= \sum_{y\in g^{-1}(p)} \operatorname{sgn}J_g(y)\left(\sum_{x\in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}J_f(x)\right) \\
&= \sum_{y\in g^{-1}(p)} \operatorname{sgn}J_g(y)\deg(f,\Omega,y) \\
&= \sum_k \sum_{y\in g^{-1}(p)\cap W_k} k\operatorname{sgn}J_g(y) \\
&= \sum_k k\left(\sum_{y\in g^{-1}(p)\cap W_k} \operatorname{sgn}J_g(y)\right) \\
&= \sum_k k\deg(g,W_k,p)
\end{aligned}
$$

证毕

简化定理反映的是如何将较高维空间的拓扑度转化为较低维空间的拓扑度. 在后面定义 Leray-Schauder 度的时候，Brouwer 度的简化性质起了十分重要的作用.

在简化定理及其证明中，我们总是把空间 $R^m$ 和 $R^n(m<n)$ 联系起来，即视 $R^m$ 为 $R^n$ 的子空间:

$$R^m=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n \mid x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0\}.$$

**定理 2·11**(简化定理) 设 $m\leqslant n$, $\Omega\subset R^n$ 为有界开集, $f\in C(\bar{\Omega},R^m)$, 令 $g(x)=x+f(x)\ (x\in\bar{\Omega})$, 记 $\Omega^m=R^m\cap\Omega$, $h=g|_{R^m\cap\bar{\Omega}}$, 若 $p\in R^m\setminus g(\partial\Omega)$, 则

$$\deg(g,\Omega,p)=\deg(h,\Omega^m,p) \tag{2·17}$$

**证明** 若 $\Omega^m=\varnothing$, 则必有 $p\overline{\in}g(\bar{\Omega})$. 否则, 若有 $x_0\in\bar{\Omega}$, 使 $g(x_0)=p$, 则 $x_0=p-f(x_0)\in\Omega^m$, 这显然与 $\Omega^m=\varnothing$ 的假定矛盾, 于是(2·17)式两端皆为零, 定理成立.

下面设 $\Omega^m \neq \varnothing$. 显然 $h: \bar{\Omega}^m \to R^m$. 因 $\partial\Omega^m \subset R^m \cap \partial\Omega$, 故 $p \bar{\in} h(\partial\Omega^m)$, 从而(2·17)式右端有意义，容易看出 $g^{-1}(p) = h^{-1}(p)$. 以下分两步证明.

(i) 设 $f \in C^1(\bar{\Omega})$, $p \bar{\in} h(Z_h)$. 此时

$$\deg(g, \Omega, p) = \sum_{x \in g^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_g(x)$$

$$= \sum_{x \in h^{-1}(p)} \operatorname{sgn} K(x)$$

其中 $K(x)$ 为分块矩阵

$$\begin{pmatrix} h'(x) & O_{n-m} \\ * & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

的行列式，从而有

$$\deg(g, \Omega, p) = \sum_{x \in h^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J_h(x)$$

$$= \deg(h, \Omega^m, p).$$

(ii) 设 $f \in C(\bar{\Omega})$. 取 $\hat{f}_j \in C^1(\bar{\Omega}, R)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, 其中当 $j > m$ 时，$\hat{f}_j = 0$, 且使得 $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \cdots, \hat{f}_n) \in C^1(\bar{\Omega})$ 满足

$$|f(x) - \hat{f}(x)| < \rho(p, g(\partial\Omega)) \quad (x \in \bar{\Omega})$$

记 $\hat{g}(x) = x + \hat{f}(x)$, 当然 $\hat{g} \in C^1(\bar{\Omega})$, 且

$$|\hat{g}(x) - g(x)| < \rho(p, g(\partial\Omega)) \qquad (x \in \bar{\Omega}) \tag{2·18}$$

设 $\hat{h} = \hat{g}|_{\bar{\Omega}^m}$, 由于 $\hat{h}$ 的临界值集的 $m$ 维 Lebesgue 测度为零，因而不妨设其除满足(2·18)式外，还满足 $p \bar{\in} \hat{h}(Z_{\hat{h}})$. 因此，由(i)得

$$\deg(g, \Omega, p) = \deg(\hat{g}, \Omega, p) = \deg(\hat{h}, \Omega^m, p)$$

$$= \deg(h, \Omega^m, p)$$

证毕

## § 3　Brouwer 定理与 Borsuk 定理

前面两节，我们用纯分析的方法建立了 Brouwer 度. 本节我们将利用度理论来证明几个著名的不动点定理. 这些定理在微分方程的研究上有着广泛的应用.

### 3·1　Brouwer 不动点定理

**定理 3·1** (Brouwer, L. E. J.)　设

(i) $\Omega\subset R^n$ 为有界开集，且 $\bar{\Omega}$ 同胚于闭单位球 $\bar{B}$;

(ii) $f\in C(\bar{\Omega}), f(\bar{\Omega})\subset\bar{\Omega}$,

则 $f$ 在 $\bar{\Omega}$ 上有不动点.

**证明**　设 $h$ 是 $\bar{\Omega}$ 到 $\bar{B}$ 的同胚映射，显然 $g=h\circ f\circ h^{-1}$ 是 $\bar{B}$ 上的连续自映射. 若有 $y\in\bar{B}$，使 $g(y)=y$，则 $x=h^{-1}(y)\in\bar{\Omega}$，使 $f(x)=x$. 因此只需证 $g$ 在 $\bar{B}$ 上有不动点.

若对某个 $x_0\in\partial B$，使 $g(x_0)=x_0$，则定理成立. 下面设 $g(x)\neq x\ (x\in\partial B)$，考虑同伦

$$h_t(x)=x-tg(x)\quad(x\in\bar{B}, 0\leqslant t\leqslant 1)$$

当 $t=1$ 时，显然 $\theta\bar{\in}h_1(\partial B)$；当 $0\leqslant t<1$ 时，对 $x\in\partial B$，因 $tg(x)\in B$，所以 $h_t(x)\neq\theta$，于是 $\theta\bar{\in}h_t(\partial B)\quad(0\leqslant t<1)$. 由 Brouwer 度的同伦不变性及标准性得

$$\deg(h_t, B, \theta)\equiv 1$$

特别当 $t=1$ 时有 $\deg(I-g, B, \theta)=1$，根据 Kronecker 存在定理，存在 $x\in B$，使 $x-g(x)=\theta$.

证毕

**定理 3·2**　设 $K\subset R^n$ 为有界闭凸集，$K^\circ\neq\varnothing$，则存在 $R^n$ 到 $R^n$ 上的同胚 $h$，满足 $h(K)=\bar{B}$，其中 $\bar{B}$ 为闭单位球.

**证明**　取 $x_0\in K^\circ$，对任何 $x\in R^n(x\neq x_0)$，线段 $[x_0, x]$ 或其延长

线必与 $\partial K$ 相交于唯一点，记该点为 $f(x)$，定义

$$h(x)=\begin{cases}0, & x=x_0\\ \dfrac{x-x_0}{|f(x)-x_0|}, & x\neq x_0\end{cases}$$

易证 $h(K)=\bar{B}$，且 $h$ 为 $R^n$ 到 $R^n$ 上的同胚. 其实 $h$ 也为 $K$ 到 $\bar{B}$ 上的同胚.

证毕

**定理 3·3** 设 $\Omega\subset R^n$ 为有界开集，$f\in C(\bar{\Omega})$. 若存在 $W\in\Omega$，使对一切 $x\in\partial\Omega$ 及 $\mu>1$ 都有

$$f(x)-W\neq\mu(x-W) \tag{3·1}$$

则 $f$ 在 $\bar{\Omega}$ 上有不动点.

**注** (3·1)式可改写为

$$f(x)\neq\mu x+(1-\mu)W \qquad (\mu>1)$$

这表明 $f(x)$ 不在由 $W$、$x$ 构成的线段的 $x$ 点以外的延长线上.

**证明** 不妨设 $f$ 在 $\partial\Omega$ 上没有不动点，否则定理得证. 考虑同伦

$$h_t(x)=x-W-t(f(x)-W) \quad (x\in\bar{\Omega},0\leqslant t\leqslant 1)$$

容易验证 $\theta\bar{\in}h_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. 由同伦不变性有

$$\begin{aligned}\deg(I-f,\Omega,\theta)&=\deg(I-W,\Omega,\theta)\\&=\deg(I,\Omega,W)=1\end{aligned}$$

这里用到了定理 2·6. 由 Kronecker 存在定理，存在 $\xi\in\Omega$，使 $\xi=f(\xi)$.

证毕

**推论** 设 $\Omega\subset R^n$ 为有界开集，$\theta\in\Omega$，$f\in C(\bar{\Omega})$. 如果对任何 $\mu\geqslant 1$，$f(x)=\mu x$ 在边界 $\partial\Omega$ 上无解，则 $f(x)=x$ 在 $\Omega$ 内有解.

**证明** 在定理 3·3 中取 $W=\theta$.

证毕

## 3·2 奇映射

**定义 3·1** $\Omega\subset R^n$ 称为关于原点对称集是指，当 $x\in\Omega$ 时，有 $-x\in\Omega$. 而 $\Omega$ 上的映射 $f$ 称为奇映射指的是：对任何 $x\in\Omega$，都有

$$f(x)=-f(-x)$$

为了得到本段的主要结果，首先给出下列预备引理.

**引理 3·1**(Tietze-Urysohn 扩张定理) 设 $A$ 为距离空间 $X$ 中的闭集，$f$ 为 $A$ 上的有界连续实函数，则存在连续函数 $g$: $X\to R$，满足 $g|_A=f$，且有

$$\sup_{x\in X} g(x)=\sup_{y\in A} f(y)$$

$$\inf_{x\in X} g(x)=\inf_{y\in A} f(y)$$

**证明** 不妨设 $\inf\limits_{y\in A} f(y)=1$ 和 $\sup\limits_{y\in A} f(y)=2$. 因为不然的话，可选适当的 $\alpha,\beta,\alpha\neq0$，用映射 $\alpha f(y)+\beta$ 代替 $f(y)$. 作映射

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A\\ \inf\limits_{y\in A}(f(y)\rho(x,y))/\rho(x,A), & x\in X\backslash A\end{cases}$$

由 $1\leqslant f(y)\leqslant2$ 及点到集合之距离 $\rho(x,A)$ 的定义知，$1\leqslant g(x)\leqslant2$. 因此，只需证明 $g$ 在整个 $X$ 上连续就可以了.

首先设 $x\in A^\circ$. 由关于 $f$ 的假设，$g$ 在 $x$ 连续. 其次，设 $x\in X\backslash A$. 此时，$\rho(x,A)\neq0$ 且 $\rho(x,A)$ 是 $x$ 的连续函数. 把 $g$ 表成 $g(x)=h(x)/\rho(x,A)$，其中 $h(x)=\inf\limits_{y\in A}(f(y)\rho(x,y))$. 为证 $g$ 在开集 $X\backslash A$ 上连续，只需证 $h$ 在此集上连续. 设 $x\in X\backslash A, r=\rho(x,A)$. 当 $\rho(x,x')<\varepsilon<r$ 时，有 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x',y)+\varepsilon$ $(y\in A)$. 因为 $f(y)\leqslant2$，所以 $h(x)\leqslant h(x')+2\varepsilon$. 类似地，有 $h(x')\leqslant h(x)+2\varepsilon$，即 $h$ 连续.

最后，设 $x\in\partial A$. 对任给的 $\varepsilon>0$，取 $r>0$，使得当 $y\in A\cap B(x,r)$ 时，$|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. 记 $C=A\cap B(x,r)$，$D=A\backslash C$. 先设 $x'\in$

$X\setminus A$ 且 $\rho(x,x')<r/4$，则对每一 $y\in D$，有 $\rho(x',y)\geqslant\rho(x,y)-\rho(x,x')\geqslant 3r/4$. 因而，

$$\inf_{y\in D}(f(y)\rho(x',y))\geqslant 3r/4$$

此外，从 $f(x)\rho(x',x)\leqslant 2\rho(x',x)\leqslant r/2$，得

$$\inf_{y\in A}(f(y)\rho(x',y))=\inf_{y\in C}(f(y)\rho(x',y)) \tag{3·2}$$

但是，已经证明了当 $y\in C$ 时，$f(x)-\varepsilon<f(y)<f(x)+\varepsilon$ 和 $\inf\limits_{y\in A}\rho(x',y)=\rho(x',A)$. 于是从(3·2)有

$$(f(x)-\varepsilon)\rho(x',A)\leqslant\inf_{y\in A}(f(y)\rho(x',y))\leqslant(f(x)+\varepsilon)\rho(x',A)$$

由此推出，当 $x'\in X\setminus A$ 且 $\rho(x,x')<r/4$ 时，有 $|g(x')-f(x)|\leqslant\varepsilon$；另一方面，当 $x'\in A$ 且 $\rho(x,x')\leqslant r/4$ 时，$|g(x')-f(x)|=|f(x')-f(x)|\leqslant\varepsilon$. 因此，$g$ 在 $\partial A$ 上也连续.

证毕

Tietze-Urysohn 扩张定理可以推广到 $f: A\to R^m$ 的情形. 后面我们用到的多是这种推广形式.

**引理 3·2** 设 $K\subset R^n$ 为紧集，$f\in C^1(K,R^m)$ $(m>n)$，则 $f(K)$ 在 $R^m$ 中的测度为零.

**证明** 因 $f$ 在紧集 $K$ 上连续，故函数

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{|x-y|}, & x\neq y\\ f'(x), & x=y\end{cases}$$

在紧集 $K\times K$ 上亦连续，从而有界，故存在 $\lambda>0$，使对任何 $x,y\in K$，都有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\lambda|x-y| \tag{3·3}$$

视 $R^n$ 为 $R^m$ 的线性子空间 $R^n=\{x\in R^m\mid x_{n+1}=\cdots=x_m=0\}$，则 $K\subset R^m$，且在 $R^m$ 中的测度为零，于是对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在

$B_k=B(x_k,r_k)\subset R^m(k=1,2,\cdots,s)$，使得 $K\subset\bigcup_{k=1}^{s}B_k$ 且

$$\sum_{k=1}^{s}\text{mes}B_k<\frac{\varepsilon}{\lambda^m}$$

由(3·3)式知，对任何 $k(1\leqslant k\leqslant s)$，

$$f(B_k)\subset C_k=B(f(x_k),\lambda r_k)$$

于是，$f(K)\subset\bigcup_{k=1}^{s}C_k$，且

$$\sum_{k=1}^{s}\text{mes}C_k<\varepsilon$$

再由 $\varepsilon$ 的任意性知 $f(K)$ 在 $R^n$ 中的测度为零.

证毕

**引理 3·3** 设 $K\subset R^n$，$M\subset R^n$ 皆为紧集，$K\subset M$，$f: K\to R^m$ 连续$(m>n)$，且 $f$ 在 $K$ 上处处不为零，则 $f$ 可扩张成处处不为零的连续映射 $g: M\to R^m$.

**证明** 记 $c=\inf\limits_{x\in K}|f(x)|>0$. 取正数 $\varepsilon<\frac{1}{2}c$，由于 Tietze-Urysohn 扩张定理，$f$ 可以扩张成 $R^n$ 上的连续函数 $f_1(x)$，对 $f_1(x)$ 取 $f_2\in C^1(M,R^n)$，使之满足

$$|f_1(x)-f_2(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(x\in M)\tag{3·4}$$

据引理 3·2，$f_2(M)$ 在 $R^m$ 中的测度为零，从而可取 $p\in R^m$，满足 $|p|<\frac{1}{2}\varepsilon$，且 $p\overline{\in}f_2(M)$. 令

$$F(x)=f_2(x)-p\quad(x\in M)$$

显然 $F\in C^1(M,R^m)$，$\theta\overline{\in}F(M)$，且

$$|F(x)|\geqslant|f_2(x)|-|p|$$

$$\geqslant |f_1(x)|-|f_1(x)-f_2(x)|-|p|$$

$$>\frac{1}{2}c \quad (x\in K) \tag{3·5}$$

$$|F(x)-f_1(x)|<\varepsilon \quad (x\in M)$$

作连续函数 $\eta: R^1\to R^1$ 如下:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant\frac{1}{2}c\\ \frac{2t}{c} & t<\frac{1}{2}c\end{cases}$$

因 $\theta\overline{\in}F(M)$，故 $\eta(|F(x)|)>0(x\in M)$，令

$$G(x)=\frac{F(x)}{\eta(|F(x)|)} \quad (x\in M)$$

由 $G$ 的定义知，$|G(x)|\geqslant\frac{1}{2}c$，而由(3·5)式知

$$G(x)=F(x) \quad (x\in K)$$

从而有

$$|G(x)-f(x)|<\varepsilon \quad (x\in K)$$

再由 Tietze-Urysohn 扩张定理，存在连续映射 $\alpha\in C(R^n,R^m)$，$\alpha|_K=G-f$，且 $|\alpha(x)|<\varepsilon \quad (x\in R^n)$. 令

$$g(x)=G(x)-\alpha(x) \quad (x\in M)$$

显然 $g$ 是 $f$ 的扩张，且

$$|g(x)|\geqslant\frac{1}{2}c-\varepsilon>0 \quad (x\in M)$$

证毕

**引理 3·4** 设 $\Omega\subset R^n$ 是关于原点对称的有界开集，$\theta\overline{\in}\bar{\Omega}$. 又设 $f: \partial\Omega\to R^m(m>n)$ 为连续奇映射，且处处不为零，则存在 $f$ 的扩张 $g: \bar{\Omega}\to R^m$，$g$ 为连续奇映射且处处不为零.

**证明** 对维数 $n$ 用归纳法.

当 $n=1$ 时，存在 $\varepsilon>0$ 及 $N>0$，使 $\Omega\subset[-N,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,N]$.

令 $f_1=f|_{\partial\Omega\cap[\varepsilon,N]}$，据引理 3·3，$f_1$ 可扩张成连续映射 $f_2:[\varepsilon,N]\to R^m$，且 $f_2$ 处处不为零．定义 $g:\bar{\Omega}\to R^m$ 如下：

$$g(x)=\begin{cases}f_2(x), & x\in\bar{\Omega}\cap[\varepsilon,N]\\ -f_2(-x), & x\in\bar{\Omega}\cap[-N,-\varepsilon]\end{cases}$$

则 $g$ 为连续奇映射，且处处不为零，$g|_{\partial\Omega}=f$.

设 $n\leqslant k$ 时定理成立.

当 $n=k+1$ 时，$m>k+1$．为方便计，我们把 $R^k$ 视为 $R^{k+1}$ 的线性子空间 $R^k=\{x\in R^{k+1}|x_{k+1}=0\}$.

令 $f_1=f|_{\partial\Omega\cap R^k}$，则由归纳法假设，$f_1$ 可扩张成连续奇映射 $f_2:\bar{\Omega}\cap R^k\to R^m$，$f_2$ 处处不为零．定义

$$f_3(x)=\begin{cases}f_2(x), & x\in\bar{\Omega}\cap R^k\\ f(x), & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

显然 $f_3:(\bar{\Omega}\cap R^k)\cup\partial\Omega\to R^m$ 为连续奇映射，且处处不为零．记

$$R_{\pm}^{k+1}=\{x\in R^{k+1}|x_{k+1}\gtrless 0\}$$

$$\Omega_{\pm}=R_{\pm}^{k+1}\cap\Omega$$

$$\hat{\Omega}=(\bar{\Omega}\cap R^k)\cup\partial\Omega\cup\Omega_+$$

因 $\hat{\Omega}$ 为紧集，故由引理 3·3，$f_3$ 可以扩张成连续映射 $f_4:\hat{\Omega}\to R^{k+1}$，$f_4$ 处处不为零．最后令

$$g(x)=\begin{cases}f_4(x), & x\in\hat{\Omega}\\ -f_4(-x), & x\in\bar{\Omega}-\hat{\Omega}\end{cases}$$

则 $g:\bar{\Omega}\to R^{k+1}$ 为连续奇映射，处处不为零，且有 $g|_{\partial\Omega}=f$.

证毕

**定理 3·4** 设 $\Omega\subset R^n$ 为关于原点对称的有界开集，$\theta\in\bar{\Omega}$，$f:\partial\Omega\to R^n$ 为连续奇映射，且处处不为零，则 $f$ 可扩张成连续奇映射 $g:\bar{\Omega}\to R^n$，$g$ 在 $\bar{\Omega}\cap R^{n-1}$ 上处处不为零.

**证明** 记

$$R^{n-1}=\{x\in R^n|x_n=0\}$$

$$R^n_{\pm}=\{x\in R^n \mid x_n \gtrless 0\}$$

令 $f_1=f|_{\partial\Omega\cap R^{n-1}}$，由引理 3·4，$f_1$ 可扩张成连续奇映射 $f_2$: $\bar{\Omega}\cap R^{n-1}\to R^n$，$f_2$ 处处不为零．再令

$$f_3(x)=\begin{cases}f_2(x), & x\in\bar{\Omega}\cap R^{n-1}\\ f(x), & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

显然 $f_3$: $(\bar{\Omega}\cap R^{n-1})\cup\partial\Omega\to R^n$ 为连续奇映射，且处处不为零．由 Tietze-Urysohn 扩张定理，$f_3$ 可扩张成连续映射 $f_4$: $\bar{\Omega}\cap(R^{n-1}\cup R^n_+)\cup\partial\Omega\to R^n$．最后，令

$$g(x)=\begin{cases}f_4(x), & x\in\bar{\Omega}\cap(R^{n-1}\cup R^n_+)\cup\partial\Omega\\ -f_4(-x), & x\in\bar{\Omega}\setminus[\bar{\Omega}\cap(R^{n-1}\cap R^n_+)\cup\partial\Omega]\end{cases}$$

显然 $g$: $\bar{\Omega}\to R^n$ 是连续奇映射，$g|_{\partial\Omega}=f$，且 $g$ 在 $\bar{\Omega}\cap R^{n-1}$ 上处处不为零． 证毕

**定理 3·5** (Borsuk, K., 1933) 设 $\Omega\subset R^n$ 是关于原点对称的有界开集，$\theta\in\Omega$，$f$: $\Omega\to R^n$ 连续，$\theta\overline{\in}f(\partial\Omega)$，且对一切 $x\in\partial\Omega$ 都有

$$\frac{f(x)}{|f(x)|}\neq\frac{f(-x)}{|f(-x)|}\tag{3·6}$$

则 $\deg(f,\Omega,\theta)$ 是奇数．

**注** (3·6) 式的几何意义是：$f(x)$ 与 $f(-x)$ 不在同一方向上．显然奇映射满足条件 (3·6)，因而该定理对连续奇映射成立．

**证明** 分成下列几个步骤：

(i) 不妨设 $f$ 为奇映射，否则考虑奇映射

$$g(x)=f(x)-f(-x)\quad(x\in\bar{\Omega})$$

构造同伦

$$h_t(x)=f(x)-tf(-x)\quad(x\in\bar{\Omega},0\leqslant t\leqslant 1)$$

容易验证，$\theta\overline{\in}h_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$．由同伦不变性知

$$\deg(g,\Omega,\theta)=\deg(f,\Omega,\theta)$$

从而为证明本定理，只需证明定理对奇映射成立即可．

(ii) 取闭球 $U=\bar{B}(\theta,e)\subset\Omega$. 令

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\partial\Omega\\ x & x\in U\end{cases}$$

记 $\Omega_1=\Omega\backslash U, f_2=f_1|_{\partial\Omega_1}$. 由定理 3·4, 存在 $f_2$ 的扩张 $f_3$: $\bar{\Omega}_1\to R^n$, $f_3$ 是连续奇映射, 且在 $\bar{\Omega}_1\cap R^{n-1}$ 上处处不为零. 再令

$$f_4(x)=\begin{cases}f_3(x), & x\in\bar{\Omega}_1\\ x, & x\in U.\end{cases}$$

显然 $f_4$ 连续, 因 $\theta\bar{\in}f(\partial\Omega)$, 且当 $x\in\partial\Omega$ 时, 有

$$f_4(x)=f_3(x)=f_2(x)=f_1(x)=f(x)$$

故由定理 2·4 知

$$\deg(f_4,\Omega,\theta)=\deg(f,\Omega,\theta)\tag{3·7}$$

(iii) 记 $\Omega_1^{\pm}=R^n_{\pm}\cap\Omega_1$. 因当 $x\in\Omega_1\cap R^{n-1}$ 时, $f_3(x)\neq\theta$, 而 $\Omega_1=\Omega_1^+\cup\Omega_1^-\cup(\Omega_1\cap R^{n-1})$, 由切除性质及区域可加性有

$$\deg(f_3,\Omega_1,\theta)=\deg(f_3,\Omega_1^+,\theta)+\deg(f_3,\Omega_1^-,\theta)\tag{3·8}$$

作映射 $h(x)=-x$, 则 $h(R^n_+)=R^n_-, h(R^n_-)=R^n_+, h(\Omega_1^-)=\Omega_1^+, h(\theta)=\theta$ 且 $hf_3|_{\Omega_1^-}h^{-1}=f_3|_{\Omega_1^+}$. 由定义 1·9 有

$$\deg(f_3,\Omega_1^-,\theta)=\deg(f_3,\Omega_1^+,\theta)$$

于是(3·8)式变为

$$\deg(f_3,\Omega_1,\theta)=2\deg(f_3,\Omega_1^+,\theta)\tag{3·9}$$

(iv) 用 $U^\circ$ 表 $U$ 的内部, 并注意到 $\Omega\backslash\partial U=U^\circ\cup(\Omega\backslash U)$, 则由 $f_4$ 的定义、切除性质、区域可加性, 以及(3·7)和(3·9)两式得

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,\theta)&=\deg(f_4,\Omega,\theta)=\deg(f_4,\Omega\backslash\partial U,\theta)\\&=\deg(f_4,\Omega_1,\theta)+\deg(f_4,U^\circ,\theta)\\&=\deg(f_3,\Omega_1,\theta)+1=2\deg(f_3,\Omega_1^+,\theta)+1\end{aligned}$$

可见 $\deg(f,\Omega,\theta)$ 为奇数.

证毕

**定理 3·6** 设 $\Omega\subset R^n$ 是关于原点对称的有界开集，$\theta\in\Omega$，$f$：$\partial\Omega\to R^m$ 连续，$m<n$，则存在 $x\in\partial\Omega$，使

$$f(x)=f(-x)$$

**注** 本定理是通常说的 Borsuk 定理的推广，1933 年 Borsuk 是在奇映射情况下证明的. 若定理中 $f$ 是奇映射，则易推出，存在 $x\in\partial\Omega$，使 $f(x)=\theta$.

**证明** 视 $R^m$ 为 $R^n$ 的线性子空间 $R^m=\{x\in R^n\mid x_{m+1}=\cdots=x_n=0\}$，定义

$$g(x)=f(x)-f(-x)\quad (x\in\partial\Omega)$$

显然 $g$ 是奇映射，$g(\partial\Omega)\subset R^m$，不妨设 $g=\{g_1,\cdots,g_m\}$，又设 $\hat{g}_1,\cdots,\hat{g}_m$ 是 $g_1,\cdots,g_m$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的连续扩张，记 $h=(\hat{g}_1,\cdots,\hat{g}_m,0,\cdots,0)$，则 $h:\Omega\to R^n$ 连续，且在 $\partial\Omega$ 上是奇映射，倘若 $\theta\overline{\in}f(\partial\Omega)$，当然亦有 $\theta\overline{\in}h(\partial\Omega)$，于是对任何 $x\in\partial\Omega$，都有

$$\frac{h(x)}{|h(x)|}\neq\frac{h(-x)}{|h(-x)|}$$

由定理 3·5，$\deg(h,\Omega,\theta)\neq0$.

取 $p_\varepsilon=(0,\cdots,0,\varepsilon)\in R^n\setminus R^m$，当 $\varepsilon$ 充分小时，$p_\varepsilon$ 与 $\theta$ 在 $R^n\setminus h(\partial\Omega)$ 的同一连通分支上，从而 $\deg(h,\Omega,p_\varepsilon)$ 有定义，且

$$\deg(h,\Omega,p_\varepsilon)=\deg(h,\Omega,\theta)\neq0$$

因此 $p_\varepsilon\in h(\Omega)$，但 $h(\Omega)\subset R^m$，这显然与 $p_\varepsilon\in R^n\setminus R^m$ 矛盾. 于是我们证明了 $\theta\in g(\partial\Omega)$.

证毕

**推论 1**（Borsuk-Ulam） 设 $S^n\subset R^{n+1}$ 是 $n$ 维球面 $x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1$，$f:S^n\to R^n$ 连续，则存在 $\xi\in S^n$，使 $f(\xi)=f(-\xi)$.

**推论 2** 设 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 皆为闭集，$\bigcup\limits_{i=1}^{n+1}A_i=S^n$（$S^n$ 同推论 1），则存在 $A_i$ 及 $x_0\in S^n$，使 $x_0$ 与 $-x_0$ 都属于 $A_i$（或者说，存在 $A_i$，$A_i$

包含有对径点).

**证明** 若$\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i \neq \varnothing$, 设$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i$, 则存在$A_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$, 使$-x_0 \in A_j$, 于是$A_j$含有对径点$x_0$.

下面设$\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i = \varnothing$. $\forall x \in S^n$, 令$\rho_i(x) = \rho(x, A_i)$ $(i=1, \cdots, n+1)$, 显然, $\rho(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i(x) > 0$ $(x \in S^n)$. 定义

$$f(x) = \left(\frac{\rho_1(x)}{\rho(x)}, \cdots, \frac{\rho_n(x)}{\rho(x)}\right) \quad (x \in S^n)$$

则$f: S^n \to R^n$连续, 根据推论1, 存在$x_0 \in S^n$, 使得

$$f(x_0) = f(-x_0) \tag{3·10}$$

若对某个$j(1 \leqslant j \leqslant n)$有$\rho_j(x_0) = 0$, 则由(3·10)式, 必有$\rho_j(x_0) = \rho_j(-x_0) = 0$, 于是$A_j$含有对径点$x_0$; 否则, 由(3·10)式知, $\pm x_0 \overline{\in} \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, 于是有$\pm x_0 \in A_{n+1}$.

证毕

据Borsuk定理, 含原点的关于原点对称的有界开集上的连续奇映射, 必有不动点.

## §4 Brouwer度的应用

Brouwer度理论对各种非线性数学问题的定性研究是有效的初等拓扑工具. 它对常微分方程的诸问题, 例如边值问题、周期解问题、解的个数、歧点理论和本征值问题以及化学反应微分方程的平衡点等问题都有很好的应用.

## 4·1 开映射

下面我们讨论关于映射为开映射的条件.

设 $X,Y$ 是 Banach 空间, $f: X\to Y$ 连续, 一对一, 且为满射. 我们知道, 如果 $f$ 是线性的, 那么在上述条件下 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 上的同胚, 当然 $f$ 也是开映射. 但 $f$ 是非线性时, 它就不一定是开的.

**例 1** 设 $R^+=\{t\,|\,0\leqslant t<+\infty\}$, $S$ 是 $R^2$ 中的单位圆周, $f: R^+\to S$ 定义为

$$f(t)=\left(\cos\frac{2\pi t^2}{1+t^2},\ \sin\frac{2\pi t^2}{1+t^2}\right)$$

不难验证 $f$ 是连续的; 一对一的且是满射. 但是 $f$ 把 $R^+$ 中的开集 $[0,1)$ 映成 $S$ 中的集 $A=\left\{(\cos 2\pi u,\ \sin 2\pi u)\,|\,0\leqslant u<\frac{1}{2}\right\}$, $A$ 在 $S$ 中不是开的, 故 $f$ 不是开映射.

现在我们用拓扑度理论, 在有限维空间中, 给出一个关于非线性映射是开映射的充分条件.

**定理 4·1** 设 $D\subset R^n$ 是开集, $f: D\to R^n$ 连续且局部一对一, 即对于任何 $x\in D$, 都存在 $x$ 的邻域 $U$, $f$ 在 $U$ 上一对一, 则 $f(D)$ 是开集, 特别地, $f$ 是 $D$ 上开映射.

**证明** 只需证明对任一 $x_0\in D$, $f(x_0)$ 是 $f(D)$ 的内点即可.

不失一般性, 设 $x_0=\theta$, $f(x_0)=\theta$. 否则, 可考虑映射 $\varphi(x)=f(x_0+x)-f(x_0)$.

因 $f$ 是局部一对一的, 故可取原点的球形邻域 $\Omega$, $\bar{\Omega}\subset D$, $f$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一对一. 令

$$H(x,t)=f\left(\frac{x}{1+t}\right)-f\left(\frac{-tx}{1+t}\right)$$

则 $H: \bar{\Omega}\times[0,1]\to R^n$ 连续. 当 $x\in\partial\Omega$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 时, 由 $x\neq\theta$ 得

$$\frac{x}{1+t}\neq\frac{-tx}{1+t}$$

于是 $\theta\overline{\in}H(\partial\Omega,t)\,(0\leqslant t\leqslant1)$，由同伦不变性有

$$\deg(f,\Omega,\theta)=\deg(g,\Omega,\theta)$$

其中 $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{-x}{2}\right)$是奇映射，再由定理 3·5 便知 $\deg(f,\Omega,\theta)\neq0$.

因 $R^n\backslash f(\partial\Omega)$ 是开集，且 $\theta\in R^n\backslash f(\partial\Omega)$，从而当$|p|$充分小时，$\deg(f,\Omega,p)$ 有定义，且

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,\theta)\neq0$$

故 $p\in f(\Omega)\subset f(D)$，这说明 $f(\theta)=\theta$ 是 $f(D)$ 的内点.

证毕

设 $E\subset R^n$，$f:E\to R^n$ 连续，那么在什么条件下 $f$ 映 $E$ 的内部为 $f(E)$ 的内部呢？

如果 $f$ 是同胚映射，则由定理 4·1 有

$$f(E^\circ)=(f(E^\circ))^\circ\subset(f(E))^\circ$$

对 $f^{-1}:f(E)\to E$，由定理 4·1 有

$$f^{-1}((f(E))^\circ)\subset E^\circ$$

即

$$(f(E))^\circ\subset f(E^\circ)$$

故 $f$ 是同胚映射时，$f(E^\circ)=(f(E))^\circ$.

注意 $f$ 在 $\partial E$ 上亦有定义，此时由定理4·1知 $f(\partial E)\subset\partial f(E)$，但不一定有 $f(\partial E)=\partial f(E)$. 若 $E$ 是紧集，则有 $f(\partial E)=\partial f(E)$.

**定理 4·2** 设 $\Omega\subset R^n$ 是有界开集，$f\in C(\bar{\Omega})$是一对一的，且 $p\in f(\Omega)$，则有

$$\deg(f,\Omega,p)=\pm1$$

**证明** 因 $f$ 是连续一对一的，由定理 4·1 知，$f$ 是开的，于是 $f$ 是同胚映射，取 $B=B(p,\varepsilon)\subset f(\Omega)$. 显然 $f^{-1}(B)$是连通的，且 $f^{-1}(\partial B)$是 $f^{-1}(B)$的边界. 考虑复合映射 $f\circ f^{-1}:B\to f(\Omega)$，由 $f^{-1}$

$(B)$的连通性及乘积定理有

$$\deg(f\circ f^{-1},B,p)=\deg(f,\Delta,p)\deg(f^{-1},B,\Delta) \qquad (4\cdot1)$$

其中 $\Delta=f^{-1}(B)$. 又由切除性质

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Delta,p)$$

而

$$\deg(f\circ f^{-1},B,p)=\deg(I,B,p)=1$$

于是(4·1)式变成

$$\deg(f,\Omega,p)\deg(f^{-1},B,\Delta)=1$$

因拓扑度取整值，故有

$$\deg(f,\Omega,p)=\pm1$$

证毕

## 4·2 非线性本征值问题

这里我们利用 Brouwer 度的同伦不变性来研究非线性本征值问题. 设$X$是实线性赋范空间，$T$是从$X$到$X$的非线性算子. 如果存在实数$\lambda$及$X$中非零向量$x$，使得

$$Tx=\lambda x$$

则称$\lambda$是$T$的本征值，$x$是相应于$\lambda$的$T$的本征向量. 当然像线性算子那样，也可以考虑作用在复空间的非线性算子，这时本征值可以是复数.

下面给出关于本征值问题的几个结果.

**定理 4·3** 设$R^n$是$n$维实线性赋范空间，$\Omega\subset R^n$是有界开集，$\theta\in\Omega$. 又设$T$和$S$是从$\bar{\Omega}$到$R^n$的非线性连续算子，且

$$\deg(T,\Omega,\theta)\neq\deg(S,\Omega,\theta),$$

则存在$\lambda<0$和$x\in\partial\Omega$，使得

$$Tx=\lambda Sx$$

**证明** 由于两个拓扑度均存在，故当$x\in\partial\Omega$时，必有$Tx\neq\theta$,

$Sx \neq \theta$. 作同伦 $H: \bar{\Omega} \times [0,1] \to R^n$ 如下

$$H(x,t) = (1-t)Tx + tSx.$$

由同伦不变性，存在 $t_0 \in (0,1)$ 及 $x \in \partial\Omega$，满足

$$(1-t_0)Tx + t_0 Sx = \theta$$

即 $Tx = \lambda Sx$，其中 $\lambda = -t_0(1-t_0)^{-1} < 0$.

证毕

**定理 4·4** 设 $R^n$ 是 $n$ 维实线性赋范空间，$n$ 是奇数，$\Omega \subset R^n$ 是有界开集，$\theta \in \Omega$. 又设 $T: \partial\Omega \to R^n$ 连续，$\theta \bar{\in} T(\partial\Omega)$，则有 $T$ 的实本征值，其本征向量属于 $\partial\Omega$.

**证明** 按 Urysohn-Tietze 扩张定理(引理 3·1)，把 $T$ 可扩张成 $\bar{\Omega}$ 上的连续映射. 由假设，$\deg(T,\Omega,\theta)$ 有意义. 因为 $n$ 是奇数，所以当 $x \in R^n$ 时，$J_{-I}(x) = (-1)^n J_I(x) = -J_I(x)$. 从而 $\deg(-I,\Omega,\theta) = -1$. 当 $\deg(T,\Omega,\theta) \neq -1$ 时，在定理 4·3 中令 $S = -I$，当 $\deg(T,\Omega,\theta) = -1$ 时，令 $S = I$. 从定理 4·3 立得本定理结论.

证毕

当 $n$ 为偶数时，定理不真. 考虑下例.

**例 2** 设 $n=2$，$f(r,\phi) = (r, \phi + r)$，其中 $r, \phi$ 为极坐标，取 $\Omega$ 是以原点为心的开单位圆，显然有 $\theta \bar{\in} f(\partial\Omega)$，$f \in C(\bar{\Omega})$，但是不存在 $y \in \partial\Omega$ 与 $\lambda \neq 0$，使 $f(y) = \lambda y$.

**例 3** 通过此例，可以看到不动点定理在常微分方程定性理论中的应用.

考虑初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t)|_{t=t_0} = x_0 \end{cases} \tag{4·2}$$

其中 $f(x,t)$ 连续，对 $x$ 是齐次的，对 $t$ 是周期的，周期为 $\omega$. 假定 $f$ 是容许的，即对一切 $(t_0, x_0)$，问题(4·2)都有唯一解. 我们要讨

论的是：问题(4·2)的 Floquet 解的存在性．所谓 Floquet 解，即为问题(4·2)之满足

$$x(t+\omega)=\lambda x(t)$$

的非平凡解．

据 $f$ 关于 $x$ 的齐性知 $f(\theta,t)=0$，从而 $x\equiv\theta$ 是(4·2)之相应于$(0,\theta)$的唯一解．

设 $x(t;t_0,x_0)$是问题(4·2)的解．令 $T$: $R^n\to R^n$ 如下

$$T(c)=x(\omega;0,c)$$

则对充分小的 $\alpha>0$，$T(c)$在球 $B_\alpha=\{c\in R^n||c|<\alpha\}$内有定义．由常微分方程解对初值的连续性知，$T$ 连续．因 $T(c)=\theta$ 当且仅当 $c=\theta$，故 $\theta\overline{\in}T(\partial B_\alpha)$．

当 $n$ 为奇数时，据定理 4·4，存在 $y\in\partial B_\alpha$ 及 $\lambda\neq0$，使 $T(y)=\lambda y$，即

$$x(\omega;0,y)=\lambda y=\lambda x(0;0,y) \tag{4·3}$$

由 $f$ 关于 $x$ 的齐次性知，$x(\omega+t;0,y)$与 $\lambda x(t;0,y)$皆为问题(4·2)的解，再由(4·3)式及解的唯一性知

$$x(\omega+t;0,y)=\lambda x(t;0,y)$$

于是 $x(t;0,y)$是问题(4·2)的 Floquet 解．

当 $n$ 为偶数时，可借助于辅助方程

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,t)\\ \dot{x}_{n+1}=x_{n+1}\\ x(t)|_{t=t_0}=x_0\end{cases}$$

把方程(4·2)化为上述情形．

### 4·3 非自治方程的周期解

记

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}\quad \frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}\end{pmatrix}$$

$$f(t,x)=f(t,x_1,\cdots,x_n,)=\begin{pmatrix}f_1(t,x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots \\ f_n(t,x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix}$$

考虑常微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{4·4}$$

它的右端显含 $t$，称(4·4)为非自治方程组. 假定 $f$ 对 $t$ 是 $T$-周期的，即存在 $T>0$，使得对一切 $t\in R^1$ 及 $x\in R^n$，有

$$f(t+T,x)=f(t,x)$$

那么在什么条件下，方程组(4·4)有 $T$-周期解呢？我们用 Brouwer 不动点定理研究这个问题. 为此先给出一条简单引理，它对研究非自治方程组的周期解是很有用的.

**引理 4·1** 设 $f$ 的每一分量在 $R\times R^n$ 上连续可微，且为 $t$ 的 $T$-周期函数，则(4·4)的解 $x(t)$ 是 $T$-周期解当且仅当

$$x(T)=x(0) \tag{4·5}$$

**证明** 设(4·4)的解 $x(t)$ 具有周期 $T$，则(4·5)显然成立.

反之，设(4·4)的解 $x(t)$ 满足(4·5)式. 令 $y(t)=x(t+T)$. 因为 $f$ 对 $t$ 是 $T$-周期的，所以

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}x(t+T)=f(t+T,x(t+T))$$

$$=f(t,x(t+T))=f(t,y(t))$$

但从(4·5)式，知

$$y(0)=x(T)=x(0)$$

因而，由解的唯一性知，对一切 $t\in R^1$ 有

$$x(t+T)=y(t)=x(t)$$

证毕

**定理 4·5** 设 $f$ 的每一分量在 $R\times R^n$ 上连续可微，且为 $t$ 的 $T$-周期函数. 又设存在有界开集 $\Omega\subset R^n$ 使得 $\bar{\Omega}$ 与 $R^n$ 中某一闭球同胚. 再设当 $c\in\bar{\Omega}$ 时，若 $x(t,c)$ 是方程组(4·4)适合初始条件 $x(0,c)=c$ 的解，就必有 $x(T,c)\in\bar{\Omega}$，则存在 $c_0\in\bar{\Omega}$，使得 $x(t,c_0)$ 是方程组(4·4)的 $T$-周期解.

**证明** 由假设，当 $c\in\bar{\Omega}$ 时，如果 $x(t,c)$ 是方程组(4·4)满足初始条件 $x(0,c)=c$ 的解，则 $x(T,c)\in\bar{\Omega}$. 这样，由 $Ac=x(T,c)$ 所定义的映射 $A$，就映 $\bar{\Omega}$ 到 $\bar{\Omega}$. 根据解对初值的连续相依性定理，$A$ 是连续的. 因而，由 Brouwer 不动点定理，存在 $c_0\in\bar{\Omega}$，使得

$$x(0,c_0)=c_0=x(T,c_0)$$

再依引理 4·1，$x(t,c_0)$ 是方程组(4·4)的 $T$-周期解.

证毕

## §5 Leray-Schauder 度

### 5·1 引言

本节的目的是将有限维赋范空间中连续映射拓扑度的概念，推广到无穷维赋范空间的映射. 此项工作是法国数学家 Leray 与波兰数学家 Schauder 于 1934 年完成的.

设 $X$ 是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$ 是有界开集. 我们希望对 $\Omega$ 上的某类映射定义拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$. 它是三个变元的整值函数，应该具有如下性质

(i) (标准性) $\deg(I,\Omega,p)=1 \quad (p\in\Omega)$;

(ii) (可解性) 当 $\deg(f,\Omega,p)\neq 0$ 时，必定存在 $x\in\Omega$，满足

$f(x)=p$;

(iii)（同伦不变性） 设 $h_t$ 是同伦，$p\overline{\in} h_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，则 $\deg(h_t,\Omega,p)$ 与 $t\in[0,1]$ 无关.

对于有限维赋范空间的连续映射，我们已经成功地引入拓扑度概念，它具有性质(i)～(iii). 对于无穷维赋范空间的连续映射可否实现这一点呢？1936 年，Leray 举反例说明在无穷维赋范空间中对连续映射类不能定义拓扑度，使它具有性质(i)～(iii).

**例 1** 设 $X=C[0,1]$，$x_0(s)=\frac{1}{2}(0\leqslant s\leqslant 1)$，则 $x_0\in X$. 令 $\Omega=\left\{x\in X \,\middle|\, \|x-x_0\|<\frac{1}{2}\right\}$. 任意取定如此的 $f\in X$，使得 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$0\leqslant f(s)\leqslant 1\,(0\leqslant s\leqslant 1)$. 定义 $F:\bar{\Omega}\to X$ 如下：

$$F(x)(s)=f(x(s)) \quad (x\in\bar{\Omega})$$

则 $F$ 连续且 $F(\bar{\Omega})\subset\bar{\Omega}$.

考虑线性同伦 $h_t(x)=tF(x)+(1-t)x \quad (x\in\bar{\Omega},0\leqslant t\leqslant 1)$. 以下证明 $h_t(\partial\Omega)\subset\partial\Omega \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$.

设 $y\in\partial\Omega$，则 $\|y-x_0\|=\frac{1}{2}$. 因此存在 $s_0\in[0,1]$，使得 $y(s_0)=0$，或 $y(s_0)=1$。

当 $y(s_0)=0$ 时，$h_t(y(s_0))=0\,(0\leqslant t\leqslant 1)$；当 $y(s_0)=1$ 时，$h_t(y(s_0))=1\,(0\leqslant t\leqslant 1)$. 因 $0\leqslant f(s)\leqslant 1\,(0\leqslant s\leqslant 1)$，故也有 $0\leqslant h_t(y(s))\leqslant 1\,(0\leqslant s,t\leqslant 1)$. 从而，$\|h_t(y)-x_0\|=\frac{1}{2}\ (0\leqslant t\leqslant 1)$，即 $h_t(y)\in\partial\Omega\,(0\leqslant t\leqslant 1)$。故 $h_t(\partial\Omega)\subset\partial\Omega\,(0\leqslant t\leqslant 1)$.

假定能对 $C[0,1]$ 中所有映射引进具有性质(i)～(iii) 的拓扑度. 取 $y_0(s)\in\Omega$ 因 $h_t(\partial\Omega)\subset\partial\Omega$，所以 $y_0\overline{\in} h_t(\partial\Omega)\,(0\leqslant t\leqslant 1)$. 由同伦不变性及标准性，有

$$\deg(F,\Omega,y_0)=\deg(I,\Omega,y_0)=1$$

又由可解性，$F(x)=y_0$ 在 $\Omega$ 中可解．下面取特殊的 $f$ 与$y_0$来否定 $F(x)=y_0$ 的可解性。令

$$f(s)=\begin{cases} s & 0\leqslant s\leqslant\frac{1}{2} \\ 1-s & \frac{1}{2}<s\leqslant\frac{5}{8}, \\ \frac{5}{3}(s-1)+1 & \frac{5}{8}<s\leqslant 1 \end{cases} \qquad y_0(s)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}s$$

若 $x\in\Omega$是$F(x)=y_0$ 的解，则$F(x(s))=y_0(s)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}s$．因$f(x(0))=F(x(0))=\frac{1}{4}$，所以 $x(0)=\frac{1}{4}$．由 $y_0(s)$ 的单调性，$f(x(s))$从$\frac{1}{4}$最多增到$\frac{1}{2}$，但$y_0(s)$从$\frac{1}{4}$增到$\frac{3}{4}$，与 $f(x(s))=y_0(s)$ 相矛盾．即，显然 $\deg(F,\Omega,y_0)=1$，但方程 $F(x)=y_0$ 在$\Omega$无解．

## 5·2 Leray-Schauder 度的定义

我们考虑具有 $I$-$T$ 这种形式的映射，其中 $I$ 是恒同映射，$T$ 是紧算子，$I$-$T$ 称为紧向量场．1934 年，Schauder 解决了用有限秩的连续映射 $T_\varepsilon$ 逼近紧映射 $T$ 的问题．这样，可以用$I$-$T_\varepsilon$ 来定义 $I$-$T$ 的拓扑度．

**定义 5·1** 设 $E$、$F$ 是实线性赋范空间，$M\subset E$，$T:M\to F$ 称为紧算子，是指：

(i) $T$连续；

(ii) $T$映$M$的任意有界子集$A$为$F$ 的相对紧集（即$\overline{T(A)}$ 是紧的）．

本书所说的紧算子也称为全连续算子．

若 $T(M)$包含在$F$ 的有限维子空间中，则称$T$ 为有限秩算子．

**例 2** 设函数 $K(s,t,u)$在 $0\leqslant s,t\leqslant 1$，$|u|\leqslant a$ 上连续，则

Urysohn 积分算子

$$(Tx)(s)=\int_0^1 K(s,t,x(t))\,dt$$

是空间 $C[0,1]$的闭球 $\bar{B}(\theta,a)$上的紧算子.

**证明** 先证算子$T$连续. 对任何$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\bar{B}(\theta,a)$, $u_n\to u_0$, 即有$\{u_n(s)\}$在$[0,1]$上一致收敛于$u_0(s)$. 由假定$K(s,t,u)$在$0\leqslant s,t\leqslant 1$, $|u|\leqslant a$上一致连续, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant s,t\leqslant 1}|K(s,t,u_n(t))-K(s,t,u_0(t))|=0$$

于是,

$$\|Tu_n-Tu_0\|=\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\left|\int_0^1[K(s,t,u_n(t))-K(s,t,u_0(t))]\,dt\right|$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant s,t\leqslant 1}|K(s,t,u_n(t))-K(s,t,u_0(t))|$$

$$Tu_n\to Tu_0\ (n\to\infty)$$

即$T$在$\bar{B}(\theta,a)$的任一点$u_0$处连续.

次证$T(\bar{B}(\theta,a))$是$C[0,1]$中的相对紧集. 记

$$K_0=\max_{\substack{0\leqslant s,t\leqslant 1\\|u|\leqslant a}}|K(s,t,u)|$$

则对一切$x(s)\in\bar{B}(\theta,a)$, 有

$$\|Tx(s)\|\leqslant\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1|K(s,t,x(t))|\,dt\leqslant K_0$$

即$\{Tx(s)\}$一致有界. 又由$K(s,t,u)$的一致连续性可知, 对任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$s_1,s_2\in[0,1]$, $|s_1-s_2|<\delta$, $t\in[0,1]$, $|u|\leqslant a$时, 就有

$$|K(s_1,t,u)-K(s_2,t,u)|<\varepsilon$$

从而对一切$x(s)\in\bar{B}(\theta,a)$, 也就有

$$|(Tx)(s_1)-(Tx)(s_2)|$$

$$\leqslant\int_0^1|K(s_1,t,x(t))-K(s_2,t,x(t))|\,dt<\varepsilon$$

即 $T(\bar{B}(\theta,a))$是等度连续的. 依 Arzela-Ascoli 定理，它必有一致收敛的子列，即 $T(\bar{B}(\theta,a))$是 $C[0,1]$中的相对紧集.

证毕

**例 3** Hammerstein 算子

$$(Tx)(s)=\int_0^1 K(s,t)f(t,x(t))\,dt \tag{5·1}$$

是 Urysohn 算子的特殊情况. 它的抽象形式是算子 $T=K\circ F$，其中 $F$ 是非线性算子 $(Fx)(t)=f(t,x(t))$，$K$ 是线性积分算子

$$(K\varphi)(s)=\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

容易验证算子 $T=K\circ F$ 的紧性的一个充分条件是：设 $X$、$Y$ 均为 Banach 空间，非线性算子 $F:X\to Y$ 连续且有界，线性算子 $K:Y\to X$ 是紧的，则 $T=K\circ F:X\to X$ 是紧算子. 对空间 $L^2[0,1]$，线性积分算子 $K$ 的核函数 $K(s,t)$，如果满足条件

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^2 ds\,dt<\infty \tag{5·2}$$

则它是从 $L^2[0,1]$到 $L^2[0,1]$的紧算子，(详见夏道行等编普，实变函数论与泛函分析，下册，P. 215). 回想起第一章 §1 定理 1·1，如果 Caratheodory 函数 $f(t,u)$满足条件

$$|f(t,u)|\leqslant a(t)+b|u| \quad (t\in[0,1],\ |u|<\infty) \tag{5·3}$$

其中 $a(t)\in L^2[0,1]$，$b>0$，则 $F: L^2[0,1]\to L^2[0,1]$有界且连续. 总之，对 (5·1) 式所定义的 Hammerstein 算子 $T$，如果核函数 $K(s,t)$满足(5·2)式，$f(t,u)$满足(5·3)式，则 $T$ 是从 $L^2[0,1]$到 $L^2[0,1]$的紧算子. 对于从 $L^{p_1}[0,1]$到 $L^{p_2}[0,1]$ $(p_1,p_2>1)$ 的线性积分算子 $K$，如果满足

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^{\max\left\{\frac{p_1}{p_1-1},\,p_2\right\}} ds\,dt<\infty,$$

则 $K$ 是紧算子. 在此就不证明了.

**定理5·1** 设$E$、$F$是实线性赋范空间，$M$是$E$中有界集，$T$: $M\to F$是紧算子，则对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在连续有限秩算子$T_\varepsilon$，满足

$$\|T(u)-T_\varepsilon(u)\|<\varepsilon \quad (u\in M)$$

**证明** 因$\overline{T(M)}$是紧集，所以对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\overline{T(M)}$的$\varepsilon$-网$\{v_1,\cdots,v_N\}$，使得$\{B(v_i,\varepsilon)\}_{i=1}^N$覆盖了$\overline{T(M)}$，其中$v_i\in\overline{T(M)}$ $(i=1,\cdots,N)$.

定义$m_i(x;\varepsilon)=\max(0,\varepsilon-\|Tx-v_i\|)$ $(x\in M, i=1,\cdots,N)$，那么固定$\varepsilon$时，$m_i$关于$x$连续$(i=1,\cdots,N)$. 由$\varepsilon$-网与$m_i$的定义，对于任意给定的$x\in M$，存在$i:1\leqslant i\leqslant N$，使$m_i(x;\varepsilon)>0$. 故可定义

$$\theta_i(x;\varepsilon)=\frac{m_i(x;\varepsilon)}{\sum_{j=1}^N m_j(x;\varepsilon)} \quad (x\in M, i=1,\cdots,N)$$

且$\theta_i$连续 $(i=1,\cdots,N)$，$\sum_{i=1}^N\theta_i(x;\varepsilon)=1 \quad (x\in M)$.

最后定义$T_\varepsilon(x)=\sum_{i=1}^N\theta_i(x;\varepsilon)v_i \quad (x\in M)$，则$T_\varepsilon: M\to F$连续，有有限秩.

因$x\in M$时，有$\theta_i(x;\varepsilon)=0$，或$\|Tx-v_i\|<\varepsilon$，并注意到$\sum_{i=1}^N\theta_i(x;\varepsilon)=1$，所以

$$\|Tx-T_\varepsilon x\|=\|\sum_{i=1}^N\theta_i(x;\varepsilon)(Tx-v_i)\|<\varepsilon \quad (x\in M)$$

证毕

设$X$是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$是有界开集，$p\in X\setminus f(\partial\Omega)$，$f=I-T$，$T:\overline{\Omega}\to X$是紧算子. 以下分几个步骤来引入Leray-Schauder度的概念.

1° 令 $r=\rho(p,f(\partial\Omega))$，则 $r>0$. 否则，若 $r=0$，则存在$\{x_n\}\subset\partial\Omega$，$f(x_n)\to p\ (n\to\infty)$. 因$\{x_n\}$有界且 $T$ 紧，所以 $\{Tx_n\}$有收敛子列. 不妨设 $Tx_n\to y\ (n\to\infty)$，那么 $x_n=Tx_n+f(x_n)\to y+p\quad(n\to\infty)$. 由 $T$ 的连续性，$y=\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=T(y+p)$，即有 $p=f(y+p)$ 但 $\partial\Omega$ 是闭集且$\{x_n\}\subset\partial\Omega$，所以 $y+p=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in\partial\Omega$. 注意到 $p=f(y+p)$，与 $p\overline{\in}f(\partial\Omega)$相矛盾.

2° 对 1° 中的 $r>0$，取 $\varepsilon:0<\varepsilon<r$；由定理 5·1，存在有限秩连续算子

$$T_\varepsilon:\bar{\Omega}\to X,\ \|Tx-T_\varepsilon x\|<\varepsilon\quad(x\in\bar{\Omega})$$

记 $f_\varepsilon=I-T_\varepsilon$. 令$S_\varepsilon=\mathrm{Span}\{T_\varepsilon(\bar{\Omega}),p\}$是由 $T_\varepsilon(\bar{\Omega})$ 与 $p$ 生成的有限维线性子空间，$\Omega_\varepsilon=\Omega\cap S_\varepsilon$，则 $\Omega_\varepsilon$ 是 $S_\varepsilon$ 中的有界开集. 记$\partial\Omega_\varepsilon$是$\Omega_\varepsilon$在 $S_\varepsilon$ 中的边界. 因为

$$\begin{aligned}\partial\Omega_\varepsilon&=\bar{\Omega}_\varepsilon-\Omega_\varepsilon\subset\bar{\Omega}\cap S_\varepsilon-\Omega\cap S_\varepsilon\\&=(\bar{\Omega}-\Omega)\cap S_\varepsilon\subset\bar{\Omega}-\Omega=\partial\Omega\end{aligned}$$

所以 $\partial\Omega_\varepsilon\subset\partial\Omega$. 由 $f_\varepsilon$ 与 $S_\varepsilon$ 的定义，$f_\varepsilon(\bar{\Omega}_\varepsilon)\subset S_\varepsilon$ 而当 $x\in\partial\Omega$ 时，有

$$\|x-T_\varepsilon(x)-p\|\geqslant\|x-Tx-p\|-\|Tx-T_\varepsilon x\|>r-\varepsilon>0$$

即$p\overline{\in}f_\varepsilon(\partial\Omega)$，更有 $p\overline{\in}f_\varepsilon(\partial\Omega_\varepsilon)$.

综上所述，$\deg(f_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)$有定义 $(0<\varepsilon<r)$.

3° 为说明下面的定义 5·2 的合理性，我们给出下列引理.

**引理 5·1** 设$0<\varepsilon<r$，则 $\deg(f_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)$与 $\varepsilon$ 无关.

**证明** 取 $\varepsilon,\eta\in(0,r)$，令 $S_\varepsilon,S_\eta$ 同 2° 中所述，并记 $S_\mu=\mathrm{span}\{S_\varepsilon,S_\eta\}$，$\Omega_\mu=\Omega\cap S_\mu$. 据简化定理，有如下两式

$$\deg(f_\varepsilon,\Omega_\mu,p)=\deg(f_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)$$

$$\deg(f_\eta,\Omega_\mu,p)=\deg(f_\eta,\Omega_\eta,p)$$

故只需证明 $\deg(f_\varepsilon,\Omega_\mu,p)=\deg(f_\eta,\Omega_\mu,p)$.

作同伦 $h_t(x)=tf_\varepsilon(x)+(1-t)f_\eta(x)\quad(x\in\bar{\Omega}_\mu,0\leqslant t\leqslant 1)$，则 $\|h_t(x)-f(x)\|<t\varepsilon+(1-t)\eta<r\quad(x\in\bar{\Omega})$. 故有

$$\|h_t(x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|h_t(x)-f(x)\|>0$$
$$(x\in\partial\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$$

那么更有 $\|h_t(x)-p\|>0\ (x\in\partial\Omega_\mu,0\leqslant t\leqslant 1)$，即 $p\bar{\in}h_t(\partial\Omega_\mu)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$. 依同伦不变性，

$$\deg(f_\varepsilon,\Omega_\mu,p)=\deg(f_\eta,\Omega_\mu,p)$$

证毕

4° 对 $\varepsilon:0<\varepsilon<r$，设 $V$ 是包含 $S_\varepsilon$ 的任一有限维线性子空间，$\Omega_V=\Omega\cap V$. 据简化定理，

$$\deg(f_\varepsilon,\Omega_V,p)=\deg(f_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)$$

**定义 5·2** 设 $X$ 是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$ 为有界开集，$f=I-T$，其中 $T:\bar{\Omega}\to X$ 是紧算子. 又设 $p\in X\backslash f(\partial\Omega)$，取 $\bar{\Omega}$ 上有限秩连续算子 $\hat{T}$，满足

$$\|Tx-\hat{T}x\|<\rho(p,f(\partial\Omega))\quad(x\in\bar{\Omega})$$

再取包含 $\hat{T}(\bar{\Omega})$ 与 $p$ 的有限维线性子空间 $V$，令 $\Omega_V=\Omega\cap V$. 规定

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(\hat{f},\Omega_V,p)$$

其中 $\hat{f}=I-\hat{T}$，称为紧向量场 $f$ 在 $p$ 处关于 $\Omega$ 的 Leray-Schauder 拓扑度，简称为 Leray-Schauder 度.

## 5·3 Leray-Schauder 度的性质

设 $X$ 是实线性赋范空间，$M\subset X$. 记 $K(M)=\{I-T\,|\,T:M\to X\text{ 紧}\}$，它表示 $M$ 上的紧向量场全体. 下列引理给出了紧向量场的一条重要性质.

**引理 5·2** 设 $X$ 为实线性赋范空间，$\Omega$ 为 $X$ 中的有界闭集，$T:\Omega\to X$ 是紧映射，则对紧向量场 $f=I-T$ 有

(i) $f$ 是正则映射 (proper mapping)，即对任何紧集 $K$，$f^{-1}(K)$ 是紧集；

(ii) $f$ 是闭映射，即 $f$ 映 $\Omega$ 中的任何闭子集为闭集.

**证明** (i) 任取 $x_n \in f^{-1}(K)$，则有 $y_n \in K$，$y_n = f(x_n)$ $(n \in N)$. 由 $K$ 和 $T$ 的紧性，存在子列 $y_{n_k} \to y_0 \in K$ 和 $Tx_{n_k} \to \bar{y} \in X$. 从而，$x_{n_k} = Tx_{n_k} + y_{n_k} \to \bar{y} + y_0$. 记 $x_0 = \bar{y} + y_0$，则 $x_0 \in \Omega$. 由 $f$ 的连续性及 $y_{n_k} = f(x_{n_k})$，得 $y_0 = f(x_0)$，故 $x_0 \in f^{-1}(K)$. 因此，$f^{-1}(K)$ 是紧集.

(ii) 设 $C$ 是 $\Omega$ 的闭子集，$y_n \in f(C)$，$y_n \to y_0$. 于是，存在 $x_n \in C$，使得 $f(x_n) = y_n$. 从 $x_n = Tx_n + y_n$，$T$ 的紧性和 $C$ 的闭性知，存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 及 $x_0 \in C$，使得 $x_{n_k} = Tx_{n_k} + y_{n_k} \to x_0$. 再由 $T$ 的连续性知 $f(x_0) = y_0$，故 $y_0 \in f(C)$.

证毕

以下设 $\Omega$ 是 $X$ 的有界开集，$T: \bar{\Omega} \to X$ 是紧算子，$f = I - T$，$p \in X \setminus f(\partial\Omega)$.

**定理 5·2**（标准性） $\deg(I, \Omega, p) = 1$ $(p \in \Omega)$.

**证明** 取包含 $p$ 的有限维线性子空间 $V$，$\Omega_V = \Omega \cap V$，$\hat{T} = 0$，则有 $p \in \Omega_V$ 且

$$\deg(I, \Omega, p) = \deg(I, \Omega_V, p) = 1$$

证毕

**定理 5·3**（可解性） 设 $f \in K(\bar{\Omega})$ 且 $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$，则存在 $x_0 \in \Omega$，使得 $f(x_0) = p$.

**证明** 取 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$. 由定理 5·1，存在 $T$ 的连续有限秩逼近 $T_{\frac{1}{n}}$，于是 $\deg(f, \Omega, p) = \deg(\hat{f}, \Omega_V, p)$，其中 $\hat{f} = I - T_{\frac{1}{n}}$，$V$ 是包含 $T_{\frac{1}{n}}(\bar{\Omega})$ 与 $p$ 的有限维线性子空间，且不妨设 $\|Tx - T_{\frac{1}{n}}(x)\| < \dfrac{1}{n}\rho(p, f(\partial\Omega))$ $(x \in \bar{\Omega})$.

由于 $\deg(\hat{f}, \Omega_V, p) \neq 0$，因而，存在 $x_n \in \Omega$，使得 $x_n - T_{\frac{1}{n}}(x_n) = p$.

因 $T: \bar{\Omega} \to X$ 紧且 $\{x_n\}$ 有界，所以 $\{Tx_n\}$ 有收敛子列，不妨设 $Tx_n \to \xi (n \to \infty)$. 注意到 $x_n = Tx_n + p + (T_{\frac{1}{n}}(x_n) - T(x_n)) \to \xi + p (n \to \infty)$ 且 $T$ 连续，故 $Tx_n \to (\xi + p)$ $(n \to \infty)$，即有 $\xi = T(\xi + p)$，$\xi + p \in \bar{\Omega}$

因此，$p = (\xi + p) - T(\xi + p) = f(\xi + p)$. 记 $x_0 = \xi + p$，则由 $p \bar{\in} f(\partial \Omega)$ 知，$f(x_0) = p$ 且 $x_0 \in \Omega$.

证毕

**定义 5·3** 设 $X$ 为实线性赋范空间，$M \subset X$. 称 $h_t$ 是 $M$ 上的紧同伦类，是指 $h_t(x) = H(x, t): M \times [0, 1] \to X$ 是紧映射.

**定理 5·4**(同伦不变性) 设 $X$ 是实线性赋范空间，$\Omega \subset X$ 是有界开集，$h_t$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的紧同伦类，$f_t = I - h_t$ 且 $p \bar{\in} f_t(\partial \Omega)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$，则 $\deg(f_t, \Omega, p)$ 与 $[0, 1]$，中的 $t$ 无关.

**证明** 首先来证明存在 $r > 0$，满足

$$\|f_t(x) - p\| \geqslant r \quad (x \in \partial \Omega, 0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{5·4}$$

若不然，则存在 $t_n \in [0, 1]$，$x_n \in \partial \Omega$，使得

$$f_{t_n}(x_n) = x_n - h_{t_n}(x_n) \to p \quad (n \to \infty)$$

由于 $h_t$ 是紧同伦类，易知存在子列 $h_{t_{n_k}}(x_{n_k}) \to z_0 \in X$ 且 $t_{n_k} \to t_0 \in [0, 1]$. 由此知 $x_{n_k} \to p + z_0 = x_0 \in \partial \Omega$. 再由 $h_t(x)$ 的连续性得 $x_0 - h_{t_0}(x_0) = p$，此与假定 $p \bar{\in} f_{t_0}(\partial \Omega)$ 矛盾.

现在定义 $[0, 1]$ 上的一个等价关系：

$s \sim t$ 当且仅当 $\deg(f_t, \Omega, p) = \deg(f_s, \Omega, p)$.

下面证明它所确定的等价类是开集. 从而，由 $[0, 1]$ 的连通性知 $[0, 1]$ 只有一个等价类，即 $\deg(f_t, \Omega, p)$ 与 $t \in [0, 1]$ 无关.

取 $\tau \in [0, 1]$ 及 $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \frac{1}{4} r$(即(5·4) 中的 $r$). 对于该 $\varepsilon$，再

取定义 5·2 中的空间 $V$ 与 $h_\tau$ 的逼近算子 $h_{\tau\varepsilon}$，且不妨设

$$\|h_\tau(x)-h_{\tau\varepsilon}(x)\|<\frac{1}{4}r \quad (x\in\bar{\Omega}) \tag{5·5}$$

因为 $h_\tau(x)$ 对两变元是连续的，所以存在 $\delta=\delta\left(\frac{1}{4}r,\ \bar{\Omega}\right)>0$，使得当 $|t-\tau|<\delta$ 时，有

$$\|h_\tau(x)-h_t(x)\|<\frac{1}{4}r \quad (x\in\bar{\Omega}) \tag{5·6}$$

联合 (5·5) 和 (5·6)，得

$$\|h_t(x)-h_{\tau\varepsilon}(x)\|<\frac{1}{2}r \quad (x\in\bar{\Omega},\ |t-\tau|<\delta),$$

更有

$$\|h_t(x)-h_{\tau\varepsilon}(x)\|<\rho(p,f_t(\partial\Omega)) \quad (x\in\bar{\Omega},\ |t-\tau|<\delta)$$

这说明 $h_{\tau\varepsilon}$ 可用作定义 5·2 中 $h_t$ 的逼近算子，即有

$$\deg(f_t,\Omega,p)=\deg(I-h_{\tau\varepsilon},\Omega_V,p) \tag{5·7}$$

但 (5·7) 式右端恰为 $\deg(f_\tau,\ \Omega,p)$. 故当 $|t-\tau|<\delta$ 时，$t\sim\tau$，即 $\tau$ 所对应的等价类是开集. 证毕

**定理 5·5**（边界值性质） 设 $f,g\in K(\bar{\Omega})$，当 $x\in\partial\Omega$ 时，$f(x)=g(x)$，且 $p\,\overline{\in}\,f(\partial\Omega)$，则有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

**证明** 设 $f=I-T_1$，$g=I-T_2$. 作 $h_t(x)=(1-t)T_1(x)+tT_2(x)$ $(x\in\bar{\Omega},0\leqslant t\leqslant1)$，则 $h_t$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的紧同伦类. 当 $x\in\partial\Omega$ 时，$f_t(x)=(I-h_t)(x)=(1-t)f(x)+tg(x)=f(x)\neq p$，所以 $p\,\overline{\in}\,f_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant1)$. 根据同伦不变性，有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

证毕

**定理 5·6** 设 $f\in K(\bar{\Omega})$，$p\,\overline{\in}\,f(\partial\Omega)$ 且 $q\in X$，记 $f_1(x)=f(x)-q$ $(x\in\bar{\Omega})$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f_1,\Omega,p-q)$$

**证明** 设 $f=I-T$，则 $f_1=I-T_1$，其中 $T_1(x)=T(x)+q$ $(x\in\bar{\Omega})$，显然 $f_1\in K(\bar{\Omega})$.

设 $\hat{T}$ 是有限秩连续映射且满足 $\|\hat{T}(x)-T(x)\|<r=\rho(p, f(\partial\Omega))$ $(x\in\bar{\Omega})$. 记 $\hat{T}_1(x)=\hat{T}(x)+q(x\in\bar{\Omega})$，则 $\hat{T}_1$ 亦是有限秩连续映射且

$$\|\hat{T}_1(x)-T_1(x)\|<r=\rho(p-q,f_1(\partial\Omega)) \quad (x\in\bar{\Omega})$$

取包含 $\hat{T}(\bar{\Omega}),\hat{T}_1(\bar{\Omega}),p$ 与 $p-q$ 的有限维空间 $V$，记 $\Omega_V=\Omega\cap V$,依定义 5·2，有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(I-\hat{T},\Omega_V,p)$$

$$\begin{aligned}\deg(f_1,\Omega,p-q)&=\deg(I-\hat{T}_1,\Omega_V,p-q)\\&=\deg(I-\hat{T}-q,\Omega_V,p-q)\end{aligned}$$

根据有限维空间拓扑度性质，

$$\deg(I-\hat{T}-q,\Omega_V,p-q)=\deg(I-\hat{T},\Omega_V,p)$$

故

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f_1,\Omega,p-q)$$

证毕

**定理 5·7** 设 $f\in K(\bar{\Omega})$ 且 $p\bar{\in}f(\partial\Omega)$. 若 $g\in K(\bar{\Omega})$ 且

$$\|f(x)-g(x)\|<r=\rho(p,f(\partial\Omega)) \quad (x\in\bar{\Omega})$$

则 $p\bar{\in}g(\partial\Omega)$ 且有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

**证明** 类似于定理5·5的证明，令

$$f_t(x)=(1-t)f(x)+tg(x) \quad (x\in\bar{\Omega},0\leqslant t\leqslant 1)$$

则当 $x\in\partial\Omega$ 时，有

$$\begin{aligned}\|f_t(x)-p\|&=\|t(g(x)-f(x))+(f(x)-p)\|\\&\geqslant\|f(x)-p\|-t\|g(x)-f(x)\|>(1-t)r\\&\geqslant 0 \quad (0\leqslant t\leqslant 1)\end{aligned}$$

即 $p\overline{\in} f_t(\partial\Omega)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$. 根据同伦不变性立即可得

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$$

证毕

**定理 5·8**(连通分支性质) 设 $f\in K(\overline{\Omega})$, 则对 $X\backslash f(\partial\Omega)$ 的同一连通分支上的一切 $p$, $\deg(f,\Omega,p)=\text{const}$.

**证明** 设 $p\in X\backslash f(\partial\Omega)$, 则因 $X\backslash f(\partial\Omega)$ 是开集, 故存在 $B(p,\varepsilon)\subset X\backslash f(\partial\Omega)$. 取 $q\in B(p,\varepsilon)$, 据定理 5·6, $\deg(f,\Omega,q)=\deg(f-(q-p),\Omega,p)$. 而依定理 5·7, 当 $\varepsilon$ 足够小时, 有

$$\deg(f-(q-p),\Omega,p)=\deg(f,\Omega,p)$$

可见, $p\longmapsto\deg(f,\Omega,p)$ 是 $X\backslash f(\partial\Omega)$ 上的连续整值函数. 故在同一连通分支上, $\deg(f,\Omega,p)=\text{const}$.

证毕

**定理 5·9** 设 $f\in K(\overline{\Omega})$, $p\overline{\in} f(\partial\Omega)$, 则

(i) (区域可加性) 当 $\Omega_i$ 是互不相交的开集 $(i=1,\cdots,n)$, $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Omega_i$ 时, 有 $\deg(f,\Omega,p)=\sum\limits_{i=1}^{n}\deg(f,\Omega_i,p)$;

(ii) (切除性质) 当 $K\subset\overline{\Omega}$ 是闭集且 $p\overline{\in} f(K)$ 时, 有

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega\backslash K,p)$$

**定理 5·10** (奇映射定理) 设 $\Omega$ 是实赋范线性空间 $X$ 中的关于原点对称的有界开集, $\theta\in\Omega$. 若 $f\in K(\overline{\Omega})$ 且有

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|}\neq\frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}\qquad(x\in\partial\Omega)$$

则 $\deg(f,\Omega,\theta)$ 是奇数.

以上两条定理的证明留给读者.

**定理 5·11**(乘积定理) 设 $f\in K(\overline{\Omega})$, $f(\overline{\Omega})\subset M$, $M$ 为有界开集. 记 $\varDelta=M\backslash f(\partial\Omega)$, $\varDelta$ 的连通分支为 $\varDelta_j\ (j=1,2,\cdots)$. 若 $g\in K(\overline{M})$ 且 $p\overline{\in} g(f(\partial\Omega))\cup g(\partial M)$, 则有乘积公式

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\sum_i \deg(g,\Delta_j,p)\deg(f,\Omega,\Delta_j) \tag{5·8}$$

其中$\deg(f,\Omega,\Delta_j)=\deg(f,\Omega,y)$，根据拓扑度关于连通分支的性质，它与$\Delta_j$中$y$的选择无关.

在证明这条定理之前，先进行如下说明：当$f=I-F$，$g=I-G$时，记$H=F+G\circ f$，则$g\circ f=I-H$也是紧向量场. 根据引理5·2，$f(\partial\Omega)$是闭集，所以$\Delta$是开集. 由$p\overline{\in}g(f(\partial\Omega))$得，$g^{-1}(p)$与$f(\partial\Omega)$不交. 再由引理5·2，$g^{-1}(p)$是紧集. 由此知，可用有限个$\Delta_j$覆盖$g^{-1}(p)$，因此，(5·8)式右端是有限和.

**证明** 类似于定理2·10的证明，令

$$W_k=\{y\in M\mid\deg(f,\Omega,y)=k\}$$

这样，证明(5·8)式归结为证明

$$\deg(g\circ f,\Omega,p)=\sum_k k\deg(g,W_k,p) \tag{5·9}$$

成立. 因为$g^{-1}(p)$是紧集，$f(\partial\Omega)$是闭集且两者不相交，所以这两个集合之间的距离$\rho(g^{-1}(p),f(\partial\Omega))>0$. 按定理5·1，存在$X$的有限维线性子空间(设为$n$维)$X^n$及$F$的逼近算子$F_n:\overline{\Omega}\to X^n$，使得

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}\|F(x)-F_n(x)\|<\rho(g^{-1}(p),f(\partial\Omega))$$

令$f_n=I-F_n$. 因为$F_n$也是它自己的有限维逼近，所以依Leray-Schauder度的定义，当$y\in g^{-1}(p)$时，有$\deg(f,\Omega,y)=\deg(f_n,\Omega,y)$. 令

$$W_k^{(n)}=\{y\in M\mid\deg(f_n,\Omega,y)=k\}$$

则有$g^{-1}(p)\cap W_k=g^{-1}(p)\cap W_k^{(n)}$. 于是，由定理5·9之(ii)，有

$$\deg(g,W_k,p)=\deg(g,W_k^{(n)},p)$$

从$f_n$的作法易知$g^{-1}(p)$与$f_n(\partial\Omega)$不交，因而也有$p\overline{\in}g(f_n(\partial\Omega))$

$\cup g(\partial M)$. 按定理5·1，存在$m$维线性子空间$X^m$与$G$的逼近算子$G_m: \overline{M} \to X^m$，使得

$$\sup_{x \in \overline{M}} \|G(x) - G_m(x)\| < \rho(p, g(f_n(\partial\Omega)) \cup g(\partial M))$$

由$\partial W_k^{(n)} \subset f_n(\partial\Omega) \cup \partial M$及上式得

$$\sup_{x \in \overline{M}} \|G(x) - G_m(x)\| < \rho(p, g(\partial W_k^{(n)}))$$

令$g_m = I - G_m$，依 Leray-Schauder 度之定义，有$\deg(g, W_k^{(n)}, p) = \deg(g_m, W_k^{(n)}, p)$. 取$l$维线性子空间$X^l$，使得$X^l \supset X^n \cup X^m$. 据 Leray-Schauder 度的定义，又有

$$\deg(g_m, W_k^{(n)}, p) = \deg(g_m, W_k^{(n)} \cap X^l, p) \qquad (5\cdot10)$$

$$\deg(g_m \circ f_n, \Omega, p) = \deg(g_m \circ f_n, \Omega \cap X^l, p) \qquad (5\cdot11)$$

由 Brouwer 度的乘积公式(定理2·10)，还有

$$\deg(g_m \circ f_n, \Omega \cap X^l, p) = \sum_k k \deg(g_m, W_k^{(n)} \cap X^l, p) \qquad (5\cdot12)$$

联合(5·11)，(5·12)和(5·10)得

$$\begin{aligned}\deg(g_m \circ f_n, \Omega, p) &= \deg(g_m \circ f_n, \Omega \cap X^l, p)\\ &= \sum_k k \deg(g_m, W_k^{(n)} \cap X^l, p)\\ &= \sum_k k \deg(g_m, W_k^{(n)}, p)\\ &= \sum_k k \deg(g, W_k^{(n)}, p)\\ &= \sum_k k \deg(g, W_k, p) \qquad (5\cdot13)\end{aligned}$$

从(5·13)式可知，证明(5·8)式化成了证明下列二等式成立：

$$\deg(g_m \circ f_n, \Omega, p) = \deg(g \circ f_n, \Omega, p) = \deg(g \circ f, \Omega, p) \qquad (5\cdot14)$$

作映射

$$h_t(x) = ((1-t)g + t g_m) \circ f_n(x) \qquad (x \in \overline{\Omega}, 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

显然$h_t$是$\overline{\Omega}$上的紧同伦类且当$x \in \partial\Omega$，$0 \leqslant t \leqslant 1$时，由$G_m$之作法，有

$$\|p-h_t(x)\|\geqslant\|p-g\circ f_n(x)\|-t\|g\circ f_n(x)-g_m\circ f_n(x)\|$$
$$\geqslant\rho(p,g\circ f_n(\partial\Omega))-t\sup_{x\in\overline{M}}\|G(x)-G_m(x)\|>0,$$

即 $p\overline{\in}h_t(x)\quad(x\in\partial\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$. 由同伦不变性(定理 5·4)知(5·14)的第一个等式成立. 再作

$$k_t(x)=g((1-t)f(x)+tf_n(x))\quad(x\in\overline{\Omega},0\leqslant t\leqslant 1)$$

则 $h_t$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的紧同伦类且对任何$y\in g^{-1}(p)$,当$x\in\partial\Omega,0\leqslant t\leqslant 1$时,由 $F_n$ 之作法,有

$$\|y-[(1-t)f(x)+tf_n(x)]\|$$
$$\geqslant\|y-f(x)\|-t\|F(x)-F_n(x)\|$$
$$\geqslant\rho(g^{-1}(p),f(\partial\Omega))-t\sup_{x\in\overline{\Omega}}\|F(x)-F_n(x)\|>0$$

即 $p\overline{\in}k_t(x)\quad(x\in\partial\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$. 于是,由同伦不变性立即可得(5·14)的第二个等式. 证毕

**定理 5·12**(开映射定理) 设 $\Omega$ 是实线性赋范空间 $X$ 中的开集,$f:\overline{\Omega}\to f(\overline{\Omega})$ 一对一且 $f\in K(\overline{\Omega})$,则 $f(\Omega)$ 是开集.

**证明** 任意取定 $p\in f(\Omega)$,取开球 $B:f^{-1}(p)\in B\subset\Omega$. 根据定理 5·8, 存在 $\varepsilon>0$, 使得当$\|p-q\|<\varepsilon$ 时, 有 $\deg(f,B,p)=\deg(f,B,q)$.

倘若能证明 $\deg(f,B,p)\neq 0$, 那么就有 $\deg(f,B,q)\neq 0$(当$\|p-q\|<\varepsilon$ 时). 据可解性, 当$\|p-q\|<\varepsilon$ 时, $q\in f(B)$. 即 $\{q|\,\|p-q\|<\varepsilon\}\subset f(B)\subset f(\Omega)$. 从而证明了 $f(\Omega)$ 是开集.

不失一般性,设 $f^{-1}(p)=\theta,p=\theta$. 作

$$f_t(x)=f\left(\frac{x}{1+t}\right)-f\left(\frac{-tx}{1+t}\right)\quad(x\in\overline{B},0\leqslant t\leqslant 1)$$

则 $f_t\in K(\overline{B})$. 因 $f$一对一, 所以当 $x\in\partial B$ 时, $f_t(x)\neq\theta(0\leqslant t\leqslant 1)$, 即 $\theta\overline{\in}f_t(\partial B)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$. 由同伦不变性, $\deg(f,\ B,\ \theta)=\deg(g,B,\ \theta)$, 其中 $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{-x}{2}\right)$是奇映射, 从而 $\deg(g,B,\theta)$ 是

奇数，故 $\deg(f,B,\theta)\neq 0$.

证毕.

**定理 5·13** 设 $\Omega$ 是实线性赋范空间 $X$ 的有界开集，$f\in K(\bar{\Omega})$ 是从 $\bar{\Omega}$ 到 $f(\bar{\Omega})$ 的一对一映射. 若 $p\in f(\Omega)$，则 $\deg(f,\Omega,p)=\pm 1$.

**证明** 类似于本章定理 4·2 的证明.

证毕.

## §6 Schauder 不动点定理和 Leray-Schauder 原理

### 6·1 Schauder 不动点定理

利用 Leray-Schauder 度理论可建立一些有用的不动点定理. 其证明方法常常是先利用同伦不变性断定紧向量场 $f=I-T:\bar{\Omega}\to X$ 满足 $\deg(f,\Omega,\theta)\neq 0$，则由可解性知，存在 $x^*\in\Omega$，使得 $f(x^*)=\theta$，即 $Tx^*=x^*$.

为证明著名的 Schauder 不动点定理，我们需要后面 6·3 节的 Dugundji 扩张定理，它表明线性赋范空间的闭子集是该空间的收缩核.

**定义 6·1** 设 $X$ 是拓扑空间，$\Omega\subset X$. 若存在连续映射 $r:X\to\Omega$，使得当 $x\in\Omega$ 时，恒有 $r(x)=x$，则称 $\Omega$ 是 $X$ 的收缩核. 映射 $r$ 称为是一个保核收缩.

**定理 6·1**(Schauder, 1930) 设 $X$ 是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$ 是非空有界闭凸集，$T:\Omega\to\Omega$ 是紧算子，则 $T$ 有不动点.

**证明** 因 $\Omega$ 有界，故可取以原点为心的开球 $B$，使得 $\Omega\subset B$. 据 Dugundji 定理的推论(见后面 6·3 小节)，$\Omega$ 是 $X$ 的收缩核，即存在连续映射 $r:\bar{B}\to\Omega$，使得当 $x\in\Omega$ 时，$r(x)=x$，此处 $\bar{B}$ 是闭球. 令 $\tilde{T}=T\circ r$，则 $\tilde{T}:\bar{B}\to\bar{B}$ 是紧映射. 作

$$h_t(x)=x-t\tilde{T}x \quad (x\in\bar{B},0\leqslant t\leqslant 1)$$

我们来证明 $\theta\bar{\in}h_t(\partial B)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. 事实上，当$x\in\partial B$时，必有$\tilde{T}x\neq x$. 否则，对某 $x\in\partial B$, $\tilde{T}x=x$, 即$(T\circ r)(x)=x$. 因为 $T$ 的值域包含在$\Omega$内，所以必有 $x\in\Omega$, 而这是不可能的. 因此，$\theta\bar{\in}h_1(\partial B)$. 其次，从球 $\bar{B}$ 是凸集知，当 $x\in\partial B$, $0\leqslant t<1$ 时，$t\tilde{T}x\in B$. 于是，完成了 $\theta\bar{\in}h_t(\partial B)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$的证明. 由同伦不变性，$\deg(I-\tilde{T}, B,\theta)=\deg(I,B,\theta)=1$. 据可解性，存在 $x\in B$, 使得 $\tilde{T}x=x$, 即 $T(r(x))=x$. 但 $x\in\Omega$, $r(x)=x$, 故 $Tx=x$.

证毕

**推论 1** 设

(i) $\Omega$ 同定理 6·1 所设，$\Omega_1\subset X$有界；

(ii) $h$ 是 $\Omega$ 到 $\Omega_1$ 上的同胚；

(iii) $f:\Omega_1\to\Omega_1$ 是紧算子，

则 $f$ 在 $\Omega_1$ 上有不动点.

**证明** 设 $g=h^{-1}\circ f\circ h$, 则 $g:\Omega\to\Omega$ 是紧算子. 从而存在 $x\in\Omega$ 使得 $g(x)=x$, 即 $f(h(x))=h(x)\in\Omega_1$, 故 $f$ 在$\Omega_1$ 上有不动点.

证毕

**定义 6·2** 称距离空间$X$的子集$\Omega$具有不动点性质，是指 $\Omega$ 内任一连续自映射有不动点.

**推论 2** 实线性赋范空间的紧凸集有不动点性质.

**证明** 设$\Omega$是此空间的紧凸集，$f:\Omega\to\Omega$ 连续，则 $f$ 是紧算子. 依定理 6·1 $f$ 在 $\Omega$ 上有不动点.

证毕

下列定理去掉了定理 6·1 中关于$\Omega$是凸集的要求.

**定理 6·2** 设$X$是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$ 是有界闭集，$\Omega^\circ\neq\varnothing$, $f$ 是 $\Omega$ 上的紧算子且存在 $w\in\Omega^\circ=D$, 使对一切 $\lambda>1$ 及 $x\in\partial D$, 有

$$f(x)-w \neq \lambda(x-w) \tag{6·1}$$

则 $f$ 在 $\Omega$ 上有不动点.

**证明** 作

$$h_t(x)=x-w-t(f(x)-w) \quad (x\in\overline{D}, 0\leqslant t\leqslant 1)$$

不妨设 $f$ 在 $\partial D$ 上无不动点，即 $\theta\overline{\in}h_1(\partial D)$. 据(6·1)式，当 $0<t<1$时，$\theta\overline{\in}h_t(\partial D)$. 又因 $w\in D$，所以 $\theta\overline{\in}h_0(\partial D)$. 因此，$\theta\overline{\in}h_t(\partial D)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. 依同伦不变性，$\deg(I-f,D,\theta)=\deg(I-w,D,\theta)=\deg(I,D,w)=1$. 可见，$f$ 在 $\Omega$ 上有不动点.

证毕

定理 6·1 的推论 2 能否减弱成有界闭凸集呢？也就是说 Schauder 不动点定理(定理 6·1)对连续映射是否成立呢？Kakutani 于 1943 年举反例否定回答了上述问题. 今叙述如下：

设 $Z$ 是全体整数的集合. 考虑空间 $l^2(Z)$. 对任何 $x=(\cdots,x_{-1},x_0,x_1,x_2,\cdots)$，当且仅当 $\|x\|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_n|^2<\infty$，才有 $x\in l^2(Z)$，易验证它是 Hilbert 空间. 取 $l^2(Z)$ 的基底 $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$，$e_n=(\cdots,0,0,1,0,0,\cdots)$ (第 $n$ 个位置是 1. 如果 $n$ 是负整数，则从 $-1$ 开始往回数). 这样，

$$x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e_n$$

记 $U$ 是右移算子

$$Ux=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e_{n+1}$$

**引理 6·1** 若 $x-Ux$ 是 $e_0$ 的倍数，则 $x=\theta$.

**证明** 设对某实数 $c$，有

$$x-Ux=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x_n-x_{n-1})e_n=ce_0$$

由此算出

$$x_n=\begin{cases}x_0, & 当\ n>0\\ x_{-1}, & 当\ n<0\end{cases}$$

由 $x\in l^2(\mathrm{Z})$，故必有 $x_0=x_{-1}=0$，即 $x=\theta$.

证毕

**定理 6·3**(Kakutani) $l^2(\mathrm{Z})$的单位球 $\overline{B}(\theta,1)$ 没有不动点性质.

**证明** 定义映射

$$Tx=(1-\|x\|)e_0+Ux$$

显然$T$是连续的. 因为当$\|x\|\leqslant 1$时，有

$$\begin{aligned}\|Tx\|&\leqslant(1-\|x\|)\|e_0\|+\|Ux\|\\&=(1-\|x\|)+\|x\|=1\end{aligned}$$

所以$T$是$\overline{B}(\theta,1)$内的自映射. 但是$T$没有不动点. 事实上，如果

$$x=Tx=(1-\|x\|)e_0+Ux$$

则 $x-Ux=(1-\|x\|)e_0$. 若 $x=\theta$，则 $Ux=\theta$，从而 $e_0=\theta$，这是不可能的；若 $x\neq\theta$，则由引理 6·1，又有 $x=\theta$，矛盾. 所以$T$没有不动点.

证毕

## 6·2 Schauder 不动点定理的一些推广

下列结果放松了对紧算子是某集合的自映射的要求.

**定理 6·4**(Rothe, E., 1937) 设$X$是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$是非空有界凸开集合. 又设 $T:\overline{\Omega}\to X$ 是紧算子且 $T(\partial\Omega)\subset\overline{\Omega}$. 则$T$有不动点.

**证明** 不妨设 $\theta\in\Omega$. 定义泛函

$$p(x)=\sup\{\lambda\mid 0\leqslant\lambda,\lambda x\in\Omega\}$$

显然 $p$ 是连续的. 设 $q(x)=\max\{1/p(x),1\}$，则 $q$ 也是连续的. 因

而，算子 $g(x)=\dfrac{x}{q(x)}$ 从整个$X$到 $\bar{\Omega}$ 是连续的，并且当 $x\in\bar{\Omega}$ 时，$g(x)=x$. 即 $g$ 是$\bar{\Omega}$的保核收缩. 容易看出，$x\in\partial\Omega$ 当且仅当 $p(x)=1$.

取包含 $\bar{\Omega}, T(\bar{\Omega})$ 的闭球 $\bar{B}(\theta,r)$. 作映射 $f=T\circ g$. 因 $T$ 紧，故 $f$ 紧且 $f$: $\bar{B}(\theta,r)\to\bar{B}(\theta,r)$. 由 Schauder 不动点定理（定理6.1），有 $x\in\bar{B}(\theta,r)$，使得 $x=f(x)$. 不难看出 $x\in\Omega$，所以它是 $T$ 的不动点。

证毕

**引理 6·2** 设$X$是实线性赋范空间，算子 $B:\Omega\subset X\to X$ 压缩，则 $I-B$ 是 $\Omega$ 到 $(I-B)(\Omega)$ 的同胚。如果 $(I-B)(\Omega)$ 是相对紧集，则 $\Omega$ 亦然.

**证明** 设 $\|Bx-By\|\leqslant L\|x-y\|$ $(0<L<1)$. 显然 $I-B$ 连续. 又

$$\|(I-B)x-(I-B)y\|\geqslant\|x-y\|-\|Bx-By\|\geqslant(1-L)\|x-y\|$$

因而 $(I-B)^{-1}$ 是连续的. 上述不等式也说明了，如果

$$(I-B)x_1,\cdots,(I-B)x_n$$

是集合 $(I-B)(\Omega)$ 的 $(1-L)\varepsilon$-网，则 $x_1,\cdots,x_n$ 就是 $\Omega$ 的 $\varepsilon$-网. 这就证明了引理的后半部分.

证毕

**定理 6·5** (Krasnoselskii, M. A., 1955) 设$X$是实 Banach 空间，$\Omega\subset X$ 是非空有界闭凸子集. 又设算子 $A,B:\Omega\to X$ 且

(i) $Ax+By\in\Omega$ $(\forall x,y\in\Omega)$；

(ii) $A$ 紧；

(iii) $B$ 是压缩的，

则存在 $y\in\Omega$，使得它是 $A+B$ 的不动点.

**证明** 对每一 $y\in\Omega$，因为 $Tz=Bz+Ay$ 从 $\Omega$ 到 $\Omega$ 内是压缩

的，所以方程

$$z=Bz+Ay$$

在$\Omega$内有唯一解$z$. 从而$z=(I-B)^{-1}Ay\in\Omega$. 根据引理6·2，算子$(I-B)^{-1}A:\Omega\to\Omega$紧. 按Schauder不动点定理，存在$y\in\Omega$，使$(I-B)^{-1}Ay=y$，即$(A+B)y=y$.

**证毕**

Krasnoselskii定理推广了压缩映射原理和Schauder不动点定理.

**定理6·6**(Altman, 1957) 设$X$是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$是有界开集，$\theta\in\Omega$. 又设紧算子$T:\bar{\Omega}\to X$满足

$$\|Tx-x\|^2\geqslant\|Tx\|^2-\|x\|^2\quad(x\in\Omega)\tag{6·2}$$

则$T$在$\bar{\Omega}$中必有不动点.

**证明** 令

$$f_t(x)=x-tTx$$

不妨设$T$在$\partial\Omega$上没有不动点(否则，定理已得到证明). 我们来证明$\theta\bar{\in}f_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant1)$. 事实上，若存在$0\leqslant t_0\leqslant1$，$x_0\in\partial\Omega$，使得$x_0=t_0Tx_0$，则只能$0<t_0<1$. 从而有

$$\|Tx_0-x_0\|^2=\left(\frac{1}{t_0}-1\right)^2\|x_0\|^2$$

$$\|Tx_0\|^2-\|x_0\|^2=\left(\frac{1}{t_0^2}-1\right)\|x_0\|^2$$

从(6·2)式知

$$\left(\frac{1}{t_0}-1\right)^2\|x_0\|^2\geqslant\left(\frac{1}{t_0^2}-1\right)\|x_0\|^2$$

由此得$t_0\geqslant1$，此与$0<t_0<1$相矛盾. 可见，$\theta\bar{\in}f_t(\partial\Omega)$ $(0\leqslant t\leqslant1)$. 按同伦不变性得

$$\begin{aligned}\deg(I-T,\Omega,\theta)&=\deg(f_0,\Omega,\theta)\\&=\deg(I,\Omega,\theta)\end{aligned}$$

$$=1\neq 0,$$

故 $T$ 在 $\Omega$ 内有不动点.

证毕

**推论 1** 设 $\Omega$ 是 $X$ 中的有界开集，$\theta\in\Omega$. 又设紧算子 $T:\bar{\Omega}\to X$ 满足

$$\|Tx\|\leqslant\|x\| \quad (x\in\partial\Omega) \tag{6·3}$$

则 $T$ 在 $\bar{\Omega}$ 中必有不动点.

**证明** 从假设条件(6·3)易推出(6·2).

证毕

**推论 2** 设 $\Omega$ 是实 Hilbert 空间 $H$ 中的有界开集，$\theta\in\Omega$. 又设紧算子 $T:\bar{\Omega}\to H$ 满足

$$\langle Tx,x\rangle\leqslant\|x\|^2 \quad (x\in\partial\Omega) \tag{6·4}$$

则 $T$ 在 $\bar{\Omega}$ 中必有不动点.

**证明** 当 $x\in\partial\Omega$ 时，由(6·4)知

$$\begin{aligned}\|Tx-x\|^2&=\langle Tx-x,Tx-x\rangle\\&=\|Tx\|^2-2\langle Tx,x\rangle+\|x\|^2\\&\geqslant\|Tx\|^2-2\|x\|^2+\|x\|^2\\&=\|Tx\|^2-\|x\|^2\end{aligned}$$

所以 $T$ 满足条件(6·2).

证毕

条件(6·2)，(6·3)和(6·4)分别称为 Altman, Rothe 和 Krasnoselskii 边界条件.

下面我们给出对常微分方程和偏微分方程一些问题很有用的 Leray-Schauder 原理. 应用这一原理的关键是对算子方程

$$x=\lambda Tx \tag{6·5}$$

的解作先验估计.

**定理 6·7**(Leray-Schauder 原理，1934) 设 $X$ 为实线性赋范

空间，$T:X\to X$ 是紧算子且 $\Omega=\bigcup_{\lambda\in(0,1)}\Omega_\lambda$ 是有界集，其中 $\Omega_\lambda=\{x\in X \mid x=\lambda Tx\}$，则当 $\lambda=1$ 时，方程(6·5)至少有一解.

**证明** 设 $\Omega\subset\bar{B}(\theta,r)$. 作

$$Sx=\begin{cases}Tx, & \text{当}\|Tx\|\leqslant 2r\\ 2rTx/\|Tx\|, & \text{当}\|Tx\|>2r\end{cases}$$

显然 $S:\bar{B}(\theta,2r)\to\bar{B}(\theta,2r)$. 今证明 $S$ 是紧算子. 易知 $S$ 连续. 对任何 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\bar{B}(\theta,2r)$，我们来证明 $\{Sx_n\}$ 是相对紧集. 如果有 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\|Tx_{n_k}\|\leqslant 2r$，则由于 $T$ 紧，必存在 $\{x_{n_k}\}$ 的子列 $\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$，使得 $Sx_{n_{k_l}}=Tx_{n_{k_l}}\to y\in\bar{B}(\theta,2r)\ (l\to\infty)$. 如果在 $\bar{B}(\theta,2r)$ 内仅含有有限个 $Tx_n$，则必有 $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $\|Tx_{n_j}\|>2r$. 因为 $T$ 紧，所以存在 $\{x_{n_j}\}$ 的子列 $\{x_{n_{j_m}}\}_{m=1}^{\infty}$，使得 $Tx_{n_{j_m}}\to z\in X$，从而 $Sx_{n_{j_m}}\to\dfrac{2rz}{\|z\|}(m\to\infty)$. 可见，算子 $S$ 是紧的.

由 Schauder 不动点定理，有 $x_0\in\bar{B}(\theta,2r)$，使得 $Sx_0=x_0$. 如果 $\|Tx_0\|\leqslant 2r$，则有 $Tx_0=Sx_0=x_0$，即 $x_0$ 是方程(6·5) 当 $\lambda=1$ 的解. 下面证明不可能发生 $\|Tx_0\|>2r$ 的情形. 若如此，则有

$$Sx_0=t_0Tx_0=x_0,\ \text{其中}\ 0<t_0=2r/\|Tx_0\|<1$$

这样，$\|x_0\|=2r$. 但是 $x_0\in\Omega$，应有 $\|x_0\|\leqslant r$，这是矛盾的.

证毕

## *6·3 Dugundji 扩张定理

**定义 6·3** 设 $X$ 是拓扑空间，$\{U_\alpha\}$ 和 $\{V_\beta\}$ 是空间 $X$ 的两个覆盖. 如果对任何 $V_\beta\in\{V_\beta\}$，都存在 $U_\alpha\in\{U_\alpha\}$，使得 $V_\beta\subset U_\alpha$，则称覆盖 $\{V_\beta\}$ 细于覆盖 $\{U_\alpha\}$，或者说 $\{V_\beta\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的一个加细.

**定义 6·4** 设 $X$ 是拓扑空间，$\{V_\beta\}$ 是空间 $X$ 的一个子集族. 如果对 $X$ 中任一点 $x$，必存在 $x$ 的邻域 $W_x$，使得 $W_x$ 只与 $\{V_\beta\}$ 中

有限个 $V_\beta$ 相交，则称族$\{V_\beta\}$是局部有限的.

**定义 6·5** 拓扑空间称为是仿紧的，是指对它的任何一个开覆盖，都存在细于它的局部有限的开覆盖.

对仿紧空间的任何一个开覆盖，都存在它的一个开的局部有限加细.

**定理 6·8** 距离空间是仿紧的.

这是著名的Stone定理，在此省略它的证明. 读者可参看B. T. Sims著的Fundamentals of Topology, 1976, pp. 80.

**定理 6·9(Dugundji扩张定理)** 设$X$和$Y$是线性赋范空间，$\Omega\subset X$是闭集. 又设$T:\Omega\to Y$连续. 则存在$T$的连续扩张$\tilde{T}:X\to Y$，使得$\tilde{T}(X)\subset \mathrm{co}(T(\Omega))$.

**证明** 证明的思路并不复杂. 首先我们作$X\backslash\Omega$的某个局部有限的开覆盖$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. 其次定义函数

$$\varphi_\lambda(x)=\begin{cases}0, x\overline{\in}U_\lambda\\ \rho(x,\partial U_\lambda), x\in U_\lambda\end{cases}$$

$$\psi_\lambda(x)=\frac{\varphi_\lambda(x)}{\sum\limits_{\mu\in\Lambda}\varphi_\mu(x)}$$

这里$\rho(x,\partial U_\lambda)$是点$x$到$U_\lambda$的边界的距离. 显然$\varphi_\lambda$在$X\backslash\Omega$上连续. 因为开覆盖$\{U_\lambda\}$是局部有限的，所以对每一$x\in X\backslash\Omega$，必存在$x$的邻域$W_x$，使得它只与有限个$U_\lambda$相交. 因此，对每一$x$，$\sum\limits_\mu\varphi_\mu(x)$仅有有限个非零项，且在$X\backslash\Omega$上$\sum\limits_\mu\varphi_\mu(x)>0$. 于是$\psi_\lambda$在$X\backslash\Omega$上也连续并有$0\leqslant\psi_\lambda(x)\leqslant1$，$\sum\limits_\lambda\psi_\lambda(x)=1$. 最后，在$\Omega$中再选取$a_\lambda$，令

$$\tilde{T}(x)=\begin{cases} T(x), & x\in\Omega \\ \sum_\lambda \psi_\lambda(x)T(a_\lambda), & x\overline{\in}\Omega \end{cases}$$

显然，如此作出的 $\tilde{T}$ 是 $T$ 的扩张，$\tilde{T}(X)=\mathrm{co}(T(\Omega))$，$\tilde{T}$ 在 $x\backslash\Omega$ 及 $\Omega^\circ$ 上都连续且满足

$$\|\tilde{T}(x)-T(x_0)\|\leqslant \sum_\lambda \psi_\lambda(x)\|T(a_\lambda)-T(x_0)\| \text{当 } x\overline{\in}\Omega, x_0\in\Omega \tag{6·6}$$

剩下只需来证明 $\tilde{T}$ 在 $\partial\Omega$ 上连续．设 $x_0\in\partial\Omega$．$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $z\in\Omega\cap B(x_0,\delta)$ 时，有

$$\|T(z)-T(x_0)\|<\varepsilon \tag{6·7}$$

因而，由(6·6)和(6·7)式，推得

$$\|\tilde{T}(x)-T(x_0)\|\leqslant\varepsilon\sum_\lambda\psi_\lambda(x)=\varepsilon$$

只要 $U_\lambda$ 中的 $x$(此时 $\psi_\lambda(x)\neq 0$)适合 $\|x-x_0\|$ 充分小，并且所选的诸 $a_\lambda\in B(x_0,\delta)$．这样，就证明了 $\tilde{T}$ 在 $x_0$ 连续．

满足上述要求的诸 $U_\lambda$ 和 $a_\lambda$ 取法如下：

设 $B(x)$ 是以 $x\in X\backslash\Omega$ 为心的开球且 $\mathrm{diam}B(x)\leqslant\rho(B(x),\Omega)$，例如取 $r=\rho(x,\Omega)/6$，$B(x)=B(x,r)$ 便可．于是，$X\backslash\Omega=\bigcup_{x\in X\backslash\Omega}B(x)$．按定理 6·8，对 $X\backslash\Omega$ 的这个开覆盖有一个局部有限的加细 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$．因为 $\{U_\lambda\}$ 是 $\{B(x)\}$ 的加细，所以对每一个 $U_\lambda$，存在 $B(z)$，使得 $U_\lambda\subset B(z)$．由此得 $\rho(U_\lambda,\Omega)\geqslant\rho(B(z),\Omega)>0$．因而，对每一 $\lambda\in\Lambda$，可选 $a_\lambda\in\Omega$，使得 $\rho(a_\lambda,U_\lambda)<2\rho(U_\lambda,\Omega)$．对如此的诸 $a_\lambda$，当 $\|x-x_0\|<\delta/4$，$\psi_\lambda(x)\neq 0$ $(x\in U_\lambda)$ 时，存在 $z\in X\backslash\Omega$，使得 $x\in U_\lambda\subset B(z)$，从而有

$$\begin{aligned}\|x-a_\lambda\|&\leqslant\rho(a_\lambda,U_\lambda)+\mathrm{diam}U_\lambda\leqslant 2\rho(U_\lambda,\Omega)+\mathrm{diam}B(z)\\&\leqslant 3\rho(U_\lambda,\Omega)\leqslant 3\|x-x_0\|\end{aligned}$$

这表明

$$\|a_\lambda - x_0\| \leqslant 4\|x - x_0\| < \delta$$

即确实有诸 $a_\lambda \in B(x_0, \delta)$.

证毕

**推论** 设 $\Omega \subset X$ 是闭凸集，则存在 $r: X \to \Omega$ 连续且当 $x \in \Omega$ 时，$r(x) = x$. 此时称 $\Omega$ 是收缩核.

**证明** $I: \Omega \to \Omega$ 连续. 由 Dugundji 定理，存在连续扩张 $r: X \to \Omega$.

## §7 在非线性常微分方程上的应用

本节讲述 Leray-Schauder 度理论与 Schauder 不动点定理在常微分方程的一些问题上的应用，在此只做简单介绍. 欲知其详，请参看专著[15]，[21]和[26]. 因为在非线性偏微分方程的应用不可避免地要涉及解的先验估计，这是一个专门课题，所以我们不介绍在偏微分方程的应用了.

**例 1** 考虑边值问题

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda\varphi(x, f(x)) = g(x) \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \tag{7·1}$$

当 $\varphi(x, \theta) = \sin\theta$ 时，两点问题(7·1)是单摆的强迫振动的数学模型. 处理这个问题的最简单方法是将它线性化，即用 $\theta$ 近似代替 $\sin\theta$. 但是，这样所求得的解常常不能反映原来的物理意义，所以直接求解原来的非线性方程就成为必要. 若 $\varphi$ 满足 Lipschtz 条件，则用压缩映射原理只能对充分小的 $\lambda$ 证明存在唯一解. 下面我们使用 Schauder 不动点定理，虽然不能确保解唯一，但是获得问题(7·1)对任何实数 $\lambda$ 都有解.

**定理 7·1** 设 $\varphi: [0,1] \times R \to R$ 是有界连续的，$g$ 在$[0,1]$上连

续，则对任何实数 $\lambda$，边值问题(7·1)在空间 $C^2[0,1]$内有解.

**证明** 第一章§7例1引入过空间 $C^2[0,1]$，与那里的做法类似，问题(7·1)等价于非线性 Hammerstein 型积分方程

$$f(x)=\lambda\int_0^1 k(x,y)\varphi(y,f(y))\,dy-\int_0^1 k(x,y)g(y)\,dy$$

其中 $k(x,y)$是算子$-f''$ 相应于(7·1)的边界条件的 Green 函数. 再在连续函数空间 $C[0,1]$内考虑 Hammerstein 算子.

$$(Tf)(x)=\lambda\int_0^1 k(x,y)\varphi(y,f(y))\,dy+h(x)$$

其中$h(x)=-\int_0^1 k(x,y)g(y)\,dy$，$h\in C[0,1]$. 从而，求解问题(7·1)又化成了要证明算子$T$在 $C[0,1]$内有不动点. 因为$\varphi$有界，故有 $M>0$，使得$|\varphi(x,\theta)|\leqslant M\,(0\leqslant x\leqslant 1,\theta\in R)$. 因而

$$\begin{aligned}\|Tf-h\|&=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\lambda\int_0^1 k(x,y)\,\varphi(y,f(y))\,dy\right|\\&\leqslant|\lambda|M\|K\|\end{aligned}$$

其中$K$是线性积分算子

$$(Kf)(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y)\,dy$$

记 $r=|\lambda|M\|K\|$. 这样也就证明了算子 $T:\bar{B}(h,r)\to\bar{B}(h,r)$. 因为 Hammerstein 算子是特殊的 Urysohn 算子，而由本章§5例2知，后者在 $C[0,1]$是紧算子，所以$T$是紧算子. 根据 Schauder 不动点定理，$T$ 在球 $\bar{B}(h,r)$内有不动点. 因此问题(7·1)在$C^2[0,1]$内有解.

证毕

**例2** 考虑一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0,\ (x_0\in E^1)\end{cases}\tag{7·2}$$

记矩形 $Q=\{(t,x)\in E^1\times E^1 \mid |t-t_0|\leqslant a, |x-x_0|\leqslant b\}$.

**定理 7·2**(Peano)　设 $f:Q\to E^1$ 连续且存在 $K>0$, 使得当 $(t,x)\in Q$ 时, $|f(t,x)|\leqslant K$, 则当 $c$ 满足 $0<c\leqslant a$ 且 $cK\leqslant b$ 时, 问题 (7·2) 在 $[t_0-c, t_0+c]$ 上有解.

**证明**　(7·2) 等价于积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds. \tag{7·3}$$

如果能证明算子

$$(Tx)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds \tag{7·4}$$

有不动点, 这不动点就是 (7·3) 的解. 对连续函数空间 $C[t_0-c,\ t_0+c]$ 的闭球 $\bar{B}(x_0,b)$ 中任一 $x$, 有

$$\|Tx-x_0\|=\max_{|t-t_0|\leqslant c}\left|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds\right|\leqslant Kc\leqslant b \tag{7·5}$$

可见, 算子 $T:\bar{B}(x_0,b)\to\bar{B}(x_0,b)$. 此外, 对任何 $x, x_n\in\bar{B}(x_0,b)$ 有

$$\|Tx-Tx_n\|\leqslant\max_{|t-t_0|\leqslant c}\int_{t_0}^{t}|f(s,x(s))-f(s,x_n(s))|\,ds$$

所以当 $x_n\to x$, 即 $\{x_n(t)\}$ 在 $[t_0-c,\ t_0+c]$ 上一致收敛于 $x(t)$ 时, $\|Tx-Tx_n\|\to 0\ (n\to\infty)$, 即 $T$ 连续. 最后, 对任何 $z\in T(\bar{B}(x_0,b))$, 设 $z=Tx, x\in\bar{B}(x_0,b)$. 从 (7·5) 式得

$$\|z\|\leqslant b+\|x_0\|$$

这说明 $T(\bar{B}(x_0,b))$ 是有界集. 它还是等度连续的, 这是因为

$$|z(t')-z(t'')|\leqslant\left|\int_{t'}^{t''} f(s,x(s))\,ds\right|\leqslant K|t'-t''|.$$

因此, $T(\bar{B}(x_0,b))$ 是空间 $C[t_0-c,\ t_0+c]$ 的相对紧集. 由 Schauder 不动点定理, $T$ 有不动点. 故问题 (7·2) 有解.

证毕

**例 3**　我们用拓扑度方法直接处理初值问题 (7·2), 可获得大范围的解, 并且对 $f(t,x)$ 的要求还要更弱.

**定理 7·3** 设函数 $f(t,x)$ 在 $[0,a]\times E^1$ 上连续，且存在 $M>0$，使得当 $(t,x)\in[0,a]\times E^1$ 时，有 $|f(t,x)|\leqslant M(1+|x|)$，则问题 (7·2) 在 $[0,a]$ 上至少有一解.

**证明** 只需证明方程(7·3)有连续解就可以了. 显然，由(7·4)式所定义的积分算子 $T:C[0,a]\to C[0,a]$. 作 $H(\lambda,x)=\lambda Tx$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1, x\in C[0,a])$. 如证明定理 7·2 那样，容易知道 $T$ 是 $C[0,a]$ 上的紧算子，$H(\lambda,x)$ 是 $C[0,a]$ 上的紧同伦类. 今作先验估计. 设 $x\in C[0,a]$，对某 $\lambda\in[0,1]$，满足 $x-H(\lambda,x)=\theta$. 从而由假设

$$\begin{aligned}|x(t)|&\leqslant|x_0|+\int_0^t|f(s,x(s))|ds\\&\leqslant|x_0|+M\int_0^t(1+|x(s)|)ds\\&\leqslant|x_0|+Ma+M\int_0^t|x(s)|ds\end{aligned}$$

记 $C_1=|x_0|+Ma, \varphi(t)=C_1+M\int_0^t|x(s)|ds$. 则

$$|x(t)|\leqslant\varphi(t) \tag{7·6}$$

$$\varphi'(t)=M|x(t)|\leqslant M\varphi(t) \tag{7·7}$$

从(7·7)式得

$$\int_0^t\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}ds\leqslant Mt$$

由此又得

$$\varphi(t)e^{-Mt}\leqslant\varphi(0)=C_1 \quad (t\in[0,a])$$

再由(7·6)式得 $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant a}|x(t)|\leqslant C_1e^{Ma}$. 上面我们已经证明了：如果取 $r>C_1e^{Ma}$，则对任何 $x\in\partial B(\theta,r)$ 及一切 $\lambda\in[0,1]$，都有 $x-H(\lambda,x)\neq\theta$. 依 Leray-Schauder 度的同伦不变性，有

$$\deg(I-T,B(\theta,r),\theta)=\deg(I,B(\theta,r),\theta)=1$$

即方程 $x-Tx=\theta$ 至少有一解，亦即方程(7·3) 至少有一连续解.

证毕

**注 1** 定理 7·2 和定理 7·3都可以推广到一阶常微分方程组，甚至定理的叙述和证明都不需要改变，只不过把函数都理解成向量函数就可以了.

**注 2** 从以上两条定理还可看出，用拓扑度方法处理微分方程解的存在问题比用 Schauder 不动点定理所需条件往往弱一些，而所得结论则还要更强一些.

## §8 在非线性积分方程上的应用

Hammerstein 型非线性积分方程和 Urysohn 型非线性积分方程是两类重要的积分方程. 在数学物理和工程问题上常出现这两类问题. 对它们的研究具有实际意义. 本节只是举例说明 Schauder 不动点定理对它们的应用. M. A. Krasnoselskii 的[33], M. A. Krasnoselskii 和 P. P. Zabreiko 的[34]给出拓扑度方法对这两类方程的大量应用.

给定 Hammerstein 型非线性积分方程

$$x(s)-\lambda\int_0^1 K(s,t)f(t,x(t))dt=0 \qquad (8\cdot1)$$

在此仅考虑 $\lambda$ 为实参数. 对(8·1)使用拓扑方法时，在不同的函数空间内求解，关于核函数 $K(s,t)$ 和非线性函数 $f(t,x)$ 的要求也不同.

**定理 8·1** 设函数 $f(t,x)$ 在 $[0,1]\times E^1$ 上连续且存在 $B>0$，使得对 $L^2[0,1]$ 的闭球 $\bar{B}(\theta,M)$ 内任一 $x$，有

$$\int_0^1 |f(t,x(t))|^2dt\leqslant B \qquad (8\cdot2)$$

此外，设 Caratheodory 映射 $(Fx)(t)=f(t,x(t))$ 在 $\bar{B}(\theta,M)$ 连续. 又设存在 $C>0$，使得

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^2dsdt<C^2 \qquad (8\cdot3)$$

则当$|\lambda|\leqslant\frac{M}{BC}$时，(8·1)在$\bar{B}(\theta,M)$内至少有一解.

**证明** 对算子

$$(Tx)(s)=\lambda\int_0^1 K(s,t)f(t,x(t))dt$$

用 Schwarz 不等式有

$$|(Tx)(s)|^2\leqslant|x|^2\int_0^1|K(s,t)|^2dt\int_0^1|f(t,x(t))|^2dt$$

根据(8·2)和(8·3)及$|\lambda|\leqslant\frac{M}{BC}$，积分上述不等式便得

$$\|Tx\|^2=\int_0^1|(Tx)(s)|^2ds\leqslant M^2$$

即$T:\bar{B}(\theta,M)\to\bar{B}(\theta,M)$. 因为$T=K\circ F$，其中$K$是以$K(s,t)$为核的线性积分算子，$F$是 Caratheodory 映射. 按(8·3)式，$K(s,t)$是平方可积的，而§5 例 3 已指出，算子$K$在$L^2[0,1]$是紧的. 又由假设，$F$连续，故$T:\bar{B}(\theta,M)\to\bar{B}(\theta,M)$是紧的. 由 Schauder不动点定理，$T$有不动点，即(8·1)有解.

证毕

考虑方程

$$\varphi(x)-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\varphi^2(y)dy=0 \qquad (8·4)$$

易验证它满足定理 8·1 的假设，故它至少有一解. 实际上，$\varphi_1(x)=0$和$\varphi_2(x)=\sin x$均为(8·4)的解，解不唯一. 在定理 8·1中，若假设

$$|f(t,x)|\leqslant a(t)+b|x| \quad (t\in[0,1],|x|<\infty) \qquad (8·5)$$

其中$a(t)\in L^2[0,1]$，$b>0$，则根据第一章§1 定理 1·1，Caratheodory映射在整个空间$L^2[0,1]$上连续. 此时，由定理 8·1，只要$\lambda$足够小，方程(8·1)有解. 例如方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \frac{x^2+y^2}{1+|\varphi(y)|}dy=0$$

和方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (x^2+y^2)\sin\varphi(y)\,dy=0$$

都属于此种情形. 方程(8·4)含有未知函数的平方,不满足 (8·5)式,但是,(8·4)中所确定的 Caratheodory 映射在 $L^2[0,1]$的某一闭球上仍连续,故可引用定理 8·1.

现在考虑含小参数的非线性积分方程

$$x(s)=\mu\int_a^b F(s,t,x(t))dt+\int_a^b G(s,t,x(t))dt+\alpha g(s) \tag{8·6}$$

这里 $F,G$ 和 $g$ 均为已知函数,$\mu,\alpha$ 为实参数. 如果$G(s,t,x)=0$,则(8·6)就退化成通常的 Urysohn 积分方程. 记

$$Q=\{(s,t,x)\in E^3\,|\,a\leqslant s,\ t\leqslant b,\ |x|\leqslant r_0\}.$$

**定理 8·2** 设函数 $F(s,t,x)$ 和$G(s,t,x)$在 $Q$ 上连续,$g(s)$在$[a,b]$上连续且存在 $\rho>1$ 和 $K>0$,使得

$$|G(s,t,x)|\leqslant K|x|^\rho \quad 当(s,t,x)\in Q$$

则存在 $\mu_0,\alpha_0>0$,使得当$|\mu|\leqslant\mu_0$, $|\alpha|\leqslant\alpha_0$ 时,方程(8·6)有解.

**证明** 作算子

$$(Tx)(s)=\mu\int_a^b F(s,t,x(t))dt+\int_a^b G(s,t,x(t))dt+\alpha g(s)$$

因为 $\rho>1$,故可取 $0<r\ll1$ 满足$(b-a)Kr^\rho<\frac{r}{2}$, 于是对任何 $x\in \bar{B}(\theta,r)\subset C[a,b]$,有

$$\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b G(s,t,x(t))dt\right|\leqslant(b-a)Kr^\rho\leqslant\frac{r}{2} \tag{8·7}$$

由于函数$F$在有界闭集$Q$上连续,函数 $g$ 在$[a,b]$上连续, 所以它们都是有界的. 因而,存在 $\mu_0>0,\alpha_0>0$, 使得当$|\mu|<\mu_0$, $|\alpha|<\alpha_0$时,有

$$\max_{a\leq s\leq b}\left|\mu\int_a^b F(s,t,x(t))dt\right|\leq\frac{r}{4} \tag{8·8}$$

$$\max_{a\leq s\leq b}|\alpha g(s)|\leq\frac{r}{4} \tag{8·9}$$

总之，从(8·7)，(8·8)和(8·9)得

$$\|Tx\|=\max_{a\leq s\leq b}|(Tx)(s)|\leq\frac{r}{2}+\frac{r}{4}+\frac{r}{4}=r$$

至此，已经证明了算子 $T:\bar{B}(\theta,r)\to\bar{B}(\theta,r)$.

由本章§5例2知，只要 $r$ 足够小，方程(8·6) 的右端每个积分所确定的积分算子都是 $\bar{B}(\theta,r)$ 上的紧算子，而紧算子之和仍为紧算子，所以 $T:\bar{B}(\theta,r)\to\bar{B}(\theta,r)$ 是紧算子. 根据 Schauder 不动点定理，$T$ 有不动点，即方程(8·6)有解.

证毕

例如对 Urysohn 积分方程

$$x(s)=\int_a^b L(s,t)(\cos x(t))^m dt \tag{8·10}$$

当 $L(s,t)$ 于 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续且

$$|L(s,t)|\leq\frac{r}{b-a}$$

时，若 $m>0$，则(8·10)所对应的积分算子

$$(Tx)(s)=\int_a^b L(s,t)(\cos x(t))^m dt$$

是空间 $C[a,b]$ 中的球 $\bar{B}(\theta,r)$ 上的自映射，且为紧的. 因此(8·10)有连续解. 但是 $T$ 不是压缩算子.

## 习 题

1. 设 $\Omega$ 是 $R^1$ 中的有限开区间，$0\in\Omega$. 又设 $f(x)=\alpha x^n$ $(\alpha\neq 0)$. 试证

$$\deg(f,\Omega,0)=\begin{cases}0, & \text{当 } n\neq 1\\ \operatorname{sgn}\alpha, & \text{当 } n=1\end{cases}$$

2. 设 $g(x)=f(x)+\sum_{i=0}^{n-1}a_i x^i$,其中函数 $f$ 如上题. 试证当 $r$ 充分大时,

$\deg(g,(-r,r),0)=\deg(f,(-r,r),0)$.

3. 设映射 $T$: $\bar{B}(\theta,2)\subset R^2\to R^2$ 由下式确定

$$T(x,y)=(x^3-3xy^2,-y^3+3x^2y)$$

计算 $\deg(T,B(\theta,2),(1,0))$.

4. 设 $P$ 是没有重实根的实多项式. 试证对 $P(a)P(b)\neq 0$ 的每个区间 $[a,b]$,有

$$\deg(P,(a,b),0)=\begin{cases}+1, & 当\ \mathrm{sgn}P(a)=-1,\mathrm{sgn}P(b)=+1\\ 0, & 当\ \mathrm{sgn}P(a)=\mathrm{sgn}P(b)\\ -1, & 当\ \mathrm{sgn}P(a)=+1,\mathrm{sgn}P(b)=-1\end{cases}$$

5. 设 $\Omega\subset R^n$ 是有界开集,$f$、$g\in C(\bar{\Omega})$ 且在 $\partial\Omega$ 上,$|g(x)|<|f(x)|$. 试证 $\deg(f+g,\Omega,\theta)=\deg(f,\Omega,\theta)$.

提示:利用定理 2.7.

6. 设 $A$ 是线性映射 $T:R^n\to R^n$ 所对应的矩阵. 试证当 $\det A\neq 0$ 时,$\deg(T,B(\theta,1),\theta)=\mathrm{sgn}(\det A)$;并证明当 $\det A=0$ 时,拓扑度 $\deg(T,B(\theta,1),\theta)$ 没有定义.

7. 试证当 $r>\frac{1}{\sqrt{5}}$ 时,方程组

$$\begin{cases}2x+y+\sin(x+y)=0\\ x-2y+\cos(x+y)=0\end{cases}$$

在 $R^2$ 中的球 $B(\theta,r)$ 内有解.

8. 设 $\Omega=B(\theta,1)\subset R^{2m+1}$,$f:\partial\Omega\to\partial\Omega$ 连续. 试证存在 $x\in\partial\Omega$,使得 $x=f(x)$,或 $x=-f(x)$.

9. 设 $\Omega\subset R^n$ 是有界开集,$\theta\in\Omega$,$T$: $\bar{\Omega}\to R^n$ 连续. 又设当给定 $w\in R^n$ 时,对一切 $x\in\partial\Omega$ 和 $(0,\infty)$ 中一切 $t$,有 $Tx\neq tw$. 试证 $\deg(T,\Omega,\theta)=0$,并且本征值问题 $\lambda x=Tx$ 有两个解 $\lambda_1>0$ 和 $\lambda_2>0$;其相应的本征向量 $x_1,x_2\in\partial\Omega$.

*10. 设 $f:R^n\to R^n$ 是连续 $F$-可微分的,$J_f(x)\neq 0$ 且当 $\|x\|\to\infty$ 时,$\|f(x)\|\to\infty$. 试证 $f(R^n)=R^n$.

*11. 设 $T\in C(R^n,R^n)$ 满足 $\|Tx\|\leqslant c\|x\|+d$,其中 $0\leqslant c<1$,$d\geqslant 0$. 试证 $T$ 有不动点.

*12. 设 $T\in C(R^n, R^n)$ 且存在 $c:[0,\infty)\to R^1$ 满足 $c(t)\to\infty\ (t\to\infty)$，使得

$$(Tx, x)\geqslant \|x\|c(\|x\|) \qquad \forall x\in R^n$$

试证对任一 $w\in R^n$，方程 $Tx=w$ 有解。

13. 设 $f:[0,a]\times R^n\to R^n$ 连续且存在 $M>0$，使得

$$\|f(t,y)\|\leqslant M(1+\|y\|) \qquad \forall t\in[0,a],\ y\in R^n$$

试证 $n$ 维初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t))\ t\in[0,a]\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

有解.

14. 设 $f\in C(R^n)$ 且对某 $r>0$，$f(\partial\Omega)=\partial\Omega$，其中 $\Omega=B(\theta,r)$. 试证 $\deg(f^m,\Omega,\theta)=(\deg(f,\Omega,\theta))^m$.

15. 设 $\partial\Omega=\{x\in E^n \mid \|x\|=r\}$，$f:\partial\Omega\to E^m$ 是连续奇映射 $(m<n)$. 试证 $f$ 有零点.

16. 设 $\Omega\subset R^n$ 是有界开集，$f\in C(\overline{\Omega})$，$f(\overline{\Omega})\subset\overline{\Omega}$ 且在 $\partial\Omega$ 上，$f(x)=x$. 试证 $f(\overline{\Omega})=\overline{\Omega}$.

17. 设 $\Omega\subset R^n$ 是有界开集，$f\in C(\overline{\Omega})$ 且在 $\partial\Omega$ 上，$(f(x), x)\geqslant 0$. 试证 $f$ 有零点.

18. 设 $f\in C^1(R^1\times R^1)$，$f$ 关于 $t$ 是 $\omega$-周期函数. 假定存在 $r>0$，使得当 $t\in[0,\omega]$，$\|x\|\geqslant r$ 时，有 $(\mathrm{grad}\varphi(x), f(t,x))\geqslant 0$，其中 $\varphi: R^n\to R^1$ 是连续 $F$-可微分的且当 $\|x\|\to\infty$ 时，$\varphi(x)\to-\infty$. 试证微分方程组

$$\frac{du}{dt}=f(t,x)$$

具有 $\omega$-周期解。

19. 设 $X$ 是实 Banach 空间，$T=I-T_0$，其中 $T_0$: $X\to X$ 是紧算子且存在 $\varphi: R^+\to R^+$，并且当 $r\to 0$ 时，$\varphi(r)\to 0$，使得 $\|Tx-Ty\|\geqslant\varphi(\|x-y\|)$. 试证 $T$ 是 $X$ 到 $X$ 上的同胚映射.

20. 设 $X$ 是实 Banach 空间，$T_0:\overline{B}(\theta,r)\to X$ 是紧算子，$T=I-T_0$. 又存在从 $X$ 到 $X$ 的紧线性算子 $L$，使得在 $\partial B(\theta,r)$ 上，有 $\|T_0x-Lx\|<\|x-Lx\|$。试证 $\deg(T,B(\theta,r),\theta)$ 是奇数.

21. 设 $\Omega$ 是实Banach 空间 $X$ 中的有界开集，$\theta\in\Omega$，$T:\overline{\Omega}\to X$ 是紧算子且 $\deg(I-T,\Omega,\theta)\neq 1$. 试证 $T$ 至少有一个正本征值.

22. 设 $I=[0,a]$，$X=C[0,a]$，$L$: $X\to X$ 是如下定义的线性积分算子

$$(Lx)(t)=\int_0^t K(t,s)x(s)ds$$

其中 $K(s,t)$ 是 $I\times I$ 上的连续函数. 试证 $L$ 是从 $X$ 到 $X$ 的线性紧算子且没有非零本征值；此外，如果 $\frac{\partial K}{\partial t}$ 连续，又在 $I$ 上，$K(t,t)\neq 0$，试证 $\lambda=0$ 不是 $L$ 的本征值.

23. 设 $K:[a,b]\times[a,b]\times R^1\to R^1$ 连续. 试证存在 $r>0$，使得对 $(-r,r)$ 中每一 $\lambda$，Urysohn 积分方程

$$x(s)=\lambda\int_a^b K(s,t,x(t))dt,\quad s\in[a,b]$$

在 $C[a,b]$ 内有解.

24. 设 $X$ 是实 Hilbert 空间，$\Omega\subset X$ 是有界开集，$\theta\in\Omega$，$T_1$，$T_2$: $\overline{\Omega}\to X$ 皆为紧算子且当 $x\in\partial\Omega$ 时，有 $\|T_1x-T_2x\|<\|T_2x\|$. 此外，设 $\deg(I-T_2,\Omega,\theta)\neq 0$. 试证 $T_1$ 在 $\overline{\Omega}$ 内有不动点.

25. 试证积分方程

$$3u(t)=t+(u(t))^2+\int_0^1|u(s)-s|^{1/2}ds,\quad t\in[0,1]$$

在集合 $\Omega=\{u\mid u\in C[0,1],\ 0\leqslant u(t)\leqslant 1,\ t\in[0,1]\}$ 内有解

# 第四章　变分方法

变分方法来源于数学物理方程的研究，其实质是把求解微分方程边值问题化成求泛函的极值点．关于各种非线性方程变分方法的研究已有较长历史．五十年代 M. M. Vainberg 对非线性 Hammerstein 型积分方程的变分解法做了系统的工作．由于变分方法的研究，从六十年代开始导致两类重要的非线性算子——单调算子与增生算子的发现，使得非线性泛函分析获得蓬勃发展，而 J. L. Lions从物理，力学中提出的变分不等式的研究，把变分原理推向崭新阶段．变分方法不仅对微分方程和积分方程是重要的，而且与最优化、鞍点和凸分析密切相关．

本章 § 3 将证明，若泛函 $\varphi(x)$于 $x_0$ 点$G$-可微且在 $x_0$ 处有极值，则 $\delta\varphi(x_0)=\theta(h\in X)$．变分方法的基本思想是：为证明方程 $Tx=\theta$ 有解，其中$T$是非线性算子，先从$T$作一泛函 $\varphi(x)$，使得$Tx=\mathrm{grad}\varphi(x)$(仅对$T$是势算子情形，才能作出这样的泛函)，然后证明 $\varphi(x)$有局部极值，于是在极值点 $x$，$\mathrm{grad}\varphi(x)=\theta$．因此 $\varphi(x)$的极值点便是方程 $Tx=\theta$的解．从而我们看出，变分方法与Leray-Schauder 度是有区别的，后者是将非线性方程的解看成某空间自映射的不动点．用变分方法证明方程有解的同时，还能获得势泛函 $\varphi(x)$具有极大或极小的结论．

## § 1　梯度映射

回想起在第一章 § 2 曾讲过，若算子 $T:\Omega\to X^*$ 是$\Omega$上某泛

函 $\varphi$ 的 $G$-导映射，则它是$\varphi$的梯度，记作 $\mathrm{grad}\varphi(x)=Tx$，称$T$为梯度映射. 此时 $\varphi(x)$称为$T$的势泛函. 在第一章定义 1·4，我们还给出过一种很弱的连续性概念，所谓算子的半连续性，并且还指出过：算子$T$在凸集$\Omega$上是半连续的，当且仅当对任何$x,h\in\Omega$及任何$e\in X$，$(T(x_0+th),e)$是$[0,1]$上 $t$ 的连续函数. $G$-可微算子是半连续的.

第一章定理 4·2 证明了高阶 $F$-微分是对称的. 一般来说，高阶 $G$-微分并不对称. 下面我们来证明，只要对高阶导映射加上半连续的条件，就足以保证高阶 $G$-微分的对称性.

**定理 1·1** 设$X$是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$ 是凸开集，$T:\Omega\to X^*$ 在$\Omega$上 $n$ 阶 $G$-可微分且对每一组固定的 $(h_1,\cdots,h_n)\in X\times\cdots\times X$，$d^nT(\cdot)(h_1,\cdots,h_n):\Omega\to X^*$ 在$\Omega$上是半连续的. 则对任一$x\in\Omega$，及任一排列$(p(1),\cdots,p(n))$，有

$$d^nT(x)(h_1,\cdots,h_n)=d^nT(x)(h_{p(1)},\cdots,h_{p(n)})$$

**证明** 我们仅就 $n=2$ 的情形加以证明. 任取$(h,k)\neq(\theta,\theta)$使 $x,x+h,x+k\in\Omega$，对任意 $s,t\in(0,1)$和 $e\in X$，令

$$a(s,t)=(T(x+sh+tk)-T(x+sh)-T(x+tk)+Tx,e)$$

由泛函的 Lagrange 公式得

$$a(s,t)=t(dT(x+sh+\tau_1tk)k-dT(x+\tau_1tk)k,e)$$

其中 $\tau_1\in(0,1)$，再由 Lagrange 公式得

$$a(s,t)=st(d^2T(x+\tau_2sh+\tau_1tk)(k,h),e)$$

其中 $\tau_2\in(0,1)$. 在上式中用 $tk$ 代 $sh$，用 $sh$ 代 $tk$，完全类似地可得 $a(s,t)$的另一表达式，从而

$$(d^2T(x+\tau_2sh+\tau_1tk)(k,h)-d^2T(x+\tau_3sh+\tau_4tk)(h,k),e)=0$$

其中 $\tau_3,\tau_4\in(0,1)$. 令 $s,t\to0$，由 $d^2T(\cdot)(h_1,h_2)$的半连续性得

$$(d^2T(x)(k,h)-d^2T(x)(h,k),e)=0$$

再由 Hahn-Banach 定理知

$$d^2T(x)(k,h)=d^2T(x)(h,k)$$

**证毕**

在定理 1·1 的假定下，可把高阶 $G$-微分 $d^nT(x)(h,\cdots,h)$ 记作 $d^nT(x)h^n$. 此外，如在定理 1·1 中将 $T$ 换成泛函，则不难从定理 1·1 的证明中看出，该定理仍成立.

下面我们用 $G$-微分来表达 Taylor 公式.

**引理 1·1** 设 $X$ 为实 Banach 空间，$f:(a,b)\subset E^1\to X$ 和 $g:(a,b)\to E^1$ 在 $(a,b)$ 上皆有连续导映射，则对任一闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$，有

$$\int_c^d\frac{df}{ds}(s)g(s)ds+\int_c^d f(s)\frac{dg}{ds}(s)ds$$
$$=f(d)g(d)-f(c)g(c) \tag{1·1}$$

**证明** 象通常两个函数乘积的导数公式那样，易证

$$\frac{d}{ds}[f(s)g(s)]=\frac{df(s)}{ds}g(s)+f(s)\frac{dg(s)}{ds}$$

再由第一章 § 3 中的基本定理便知(1·1)式成立.

证毕

**定理 1·2** 设 $X$ 为实 Banach 空间，$\Omega\subset X$ 为凸开集，$T:\Omega\to X^*$ 在 $\Omega$ 上 $(n+1)$ 阶 $G$-可微，且对每一固定的 $(h_1,\cdots,h_{n+1})\in\overbrace{X\times\cdots\times X}^{n+1}$，$d^{n+1}T(\cdot)(h_1,\cdots,h_{n+1}):\Omega\to X^*$ 在 $\Omega$ 上是半连续的，则对每一 $x\in\Omega$ 及所有满足 $x+h\in\Omega$ 之 $h\in X$，有

$$(T(x+h),h)=(Tx,h)+\frac{1}{1!}(dT(x)h,h)+\cdots+$$
$$\frac{1}{n!}(d^nT(x)h^n,h)$$
$$+\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^n(d^{n+1}T(x+th)h^{n+1},h)dt \tag{1·2}$$

**证明** 我们仅对 $n=1$ 的情形证明，一般情形可用归纳法类似地证明. 显然，$\forall t\in(0,1)$，$x$，$x+h\in\Omega$，有

$$(dT(x+th)h,h)=\frac{d}{dt}(T(x+th),h) \tag{1·3}$$

因$T$是二阶 $G$-可微的，故 $dT(\cdot)h$ 半连续，因此(1·3)式右端是 $t$ 之连续函数. 由抽象函数积分的基本定理及(1·3)式，得

$$(T(x+h),h)=(Tx,h)+\int_0^1(dT(x+th)h,h)dt \tag{1·4}$$

即(1·2)式对 $n=0$ 成立. 今往证 $n=1$ 时，(1·2)式也成立. 由假设 $d^2T(\cdot)h^2$ 半连续，故(1·2)式的余项

$$r(x,h)=\int_0^1(1-t)(d^2T(x+th)h^2,h)dt$$

存在. 计算之，并利用对 $d^2T$ 的与(1·3)相类似的公式和引理1·1，得

$$\begin{aligned}r(x,h)=&\int_0^1(1-t)(d^2T(x+th)h^2,h)dt\\&+\int_0^1\left(\frac{d}{dt}(1-t)\right)(dT(x+th)h,h)dt\\&+\int_0^1\frac{d}{dt}(T(x+th)h,h)dt\\=&(1-t)(dT(x+th)h,h)\big|_{t=1}\\&-(1-t)(dT(x+th)h,h)\big|_{t=0}\\&+\int_0^1(dT(x+th)h,h)dt\\=&-(dT(x)h,h)+\int_0^1(dT(x+th)h,h)dt\end{aligned} \tag{1·5}$$

将(1·5)代入(1·4)，即得

$$(T(x+h),h)=(Tx,h)+\int_0^1(dT(x+th)h,h)dt,$$

$$= (Tx,h) + (dT(x)h,h) + r(x,h)$$

$$= (Tx,h) + (dT(x)h,h) + \int_0^1 (1-t)\ (d^2T(x+th)h^2,h)dt$$

证毕

对算子 $T$: $\mathscr{D}(T) \subset X \to E^1$，有 $dT(x) \in X^*$. 从而有 $dT(x)v = (dT(x),\ v)$. 若 $\varphi$ 是 $X$ 上的泛函，则 $d\varphi(\cdot)u: X \to E^1$. 于是,

$$d^2\varphi(x)(u,v) = d[d\varphi(x)u]v = (d^2\varphi(x)u,v).$$

下列结果给出 $G$-可微分算子是梯度映射的特征.

**定理 1·3**(Vainberg, M. M., 1952) 设 $X$ 是实 Banach 空间, $\Omega \subset X$ 是凸开集, $T: \Omega \to X^*$ 在 $\Omega$ 上 $G$-可微且 $dT(\cdot)h: \Omega \to X^*$ 在 $\Omega$ 上对一切 $h \in X$ 是半连续的，则 $T$ 是 $\Omega$ 上的梯度映射当且仅当

$$(dT(x)u,v) = (dT(x)v,u) \qquad \forall u,v \in X \qquad (1\cdot 6)$$

**证明** 必要性. 因 $T$ 是梯度映射，故存在势泛函 $\varphi$，使得 $d\varphi(x) = T(x)$. 根据假设, $\varphi(x)$ 满足定理 1·1 之条件, 故

$$d^2\varphi(x)(u,v) = d^2\varphi(x)(v,u),\ \forall x \in \Omega,\ u,v \in X$$

由 $d^2\varphi(x)(u,v) = (d^2\varphi(x)u,v)$ 和 $d^2\varphi(x)(v,u) = (d^2\varphi(x)v,u)$, 得

$$(d^2\varphi(x)u,v) = (d^2\varphi(x)v,u)$$

即(1·6)式成立.

充分性. 由假设, 可定义泛函

$$\varphi(x) = \int_0^1 (T(y+t(x-y)),x-y)dt$$

今往证对固定的 $y \in \Omega$, 它为 $T$ 之势泛函. 对任意 $x, x+h \in \Omega$, 则

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) - \int_0^1 (T(y+t(x+h-y)),h)dt$$

$$= \int_0^1 (T(y+t(x+h-y)) - T(y+t(x-y)),x-y)dt \quad (1\cdot 7)$$

从 $T$ 之 $G$-微分之半连续性及基本定理, (1·7)式右端可写成

$$\int_0^1\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(T(y+t(x-y)+sh)-T(y+t(x-y)), x-y)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^1\int_0^t (dT(y+t(x-y)+sh)h, x-y)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^1\int_0^t (dT(y+t(x-y)+sh)(x-y), h)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^1\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(T(y+sh+t(x-y)), h)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^1\int_s^1 \frac{\partial}{\partial t}(T(y+sh+t(x-y)), h)\,dt\,ds$$

$$=\int_0^1 [(T(y+sh+(x-y)), h)-(T(y+s(x-y)+sh), h)]\,ds$$

$$=\int_0^1 (T(x+sh), h)\,ds-\int_0^1 (T(y+s(x-y)+sh), h)\,ds$$

由此按(1·7)式得

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_0^1 (T(x+sh), h)\,ds$$

再由积分中值定理

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=(T(x+\tau h), h),\ \tau\in(0,1)$$

对 $t\in(0,1)$，用 $th$ 代 $h$ 得

$$t^{-1}(\varphi(x+th)-\varphi(x))=(T(x+tth), h)$$

令 $t\to0$，从 $T$ 之半连续性，知 $\varphi$ 在 $x$ 处$G$-可微分且 $d\varphi(x)h=(Tx, h)$. 因 $\varphi(x)\in X^*$，$x, x+h$ 是任意的，故 $\varphi$ 在$\Omega$上 $G$-可微且

$$d\varphi=T.$$

证毕

定理 1·3 表明算子$T$为梯度映射的特征是，由$T$的 $G$-微分所确定的双线性泛函$(dT(x)u, v)$是对称的.

**定理 1·4** 设$X$是实 Banach 空间，$\Omega\subset X$，$T:\Omega\to X^*$ 满足定理 1·3 之假设. 此外，$\forall x\in\Omega$，$u, v\in X$，有

$$(dT(x)u, v)=(dT(x)v, u)$$

则$T$为梯度映射，其势泛函为

$$\varphi(x)=\int_0^1 (T(y+t(x-y)),x-y)\,dt$$

其中$y\in\Omega$是任取的，并且除相差一个常数外，$\varphi(x)$唯一。

**证明** 定理前半部已由定理1·3及其证明所得到，今只需证唯一性。

设$G$-可微分泛函$\psi:\Omega\to E^1$，$d\psi=T$，$\forall t\in(0,1)$，$x,y\in\Omega$，有

$$\frac{d}{dt}\psi(y+t(x-y))=(T(y+t(x-y)),\ x-y)$$

由$T$之半连续性，上式右端对$t$连续，因此

$$\psi(x)-\psi(y)=\int_0^1 (T(y+t(x-y)),x-y)\,dt \tag{1·8}$$

证毕

**定理1·5** 设$X$为实自反Banach空间，$\Omega\subset X$是凸开集，$T:\Omega\to X^*$是$\Omega$上之梯度映射且$dT(\cdot)$在$\Omega$上是半连续的。又$L:X^*\to X^*$线性连续，则$L\circ\Omega$为$\Omega$上的梯度映射当且仅当

$$L\circ dT(x)=dT(x)\circ L^* \quad \forall x\in\Omega \tag{1·9}$$

**证明** 首先，因$X$自反，故线性连续算子$L^*:X\to X$。其次，由链锁规则，$T$是梯度映射及定理1·3，$\forall u,v\in X$有

$$\begin{aligned}(d(L\circ T)(x)u,v)&=((L\circ dT(x))u,v)\\&=(dT(x)u,L^*v)=(dT(x)L^*v,u)\\&=(d(T(x)\circ L^*)v,u)\end{aligned} \tag{1·10}$$

设$L\circ T$是梯度映射，于是由(1·10)式及定理1·3，有

$$\begin{aligned}((L\circ dT)(x)v,u)&=(d(L\circ T)(x)u,v)\\&=(d(L\circ T)(x)u,v)\\&=((dT(x)\circ L^*)v,u)\quad \forall x\in\Omega,u,v\in X\end{aligned}$$

故(1·9)成立，必要性得证。

反之，设(1·9)成立，于是从(1·10)式得

$$
\begin{aligned}
(d(L\circ T)(x)u, v) &= (d(T(x)\circ L^*)v, u) \\
&= ((L\circ dT)(x)v, u) \\
&= (d(L\circ T)(x)v, u) \quad \forall x\in\Omega, u, v\in X
\end{aligned}
$$

从定理 1·3 知，$L\circ T$ 是梯度映射.

证毕

**推论** 设 $X$ 为实 Hilbert 空间，$L: X\to X$ 线性连续，则 $L$ 是 $X$ 上的梯度映射当且仅当它是自伴的，除差一常数外，其势泛函 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\langle Lx, x\rangle \quad (x\in X)$ 是唯一的。

**证明** 在定理 1·5 中取 $T=I$ 即可.

证毕

定理 1·4 的重要性在于它给出了梯度映射的势泛函表达式

$$
\varphi(x)=\varphi(y)+\int_0^1 (T(y+t(x-y)), x-y)\, dt
$$

其中 $y, \varphi(y)$ 都是任取的。下面我们从(1·8)式出发，导出Caratheodory 映射的势泛函数表达式.

设 $\Omega\subseteq E^n$ 为有界 Lebesgue 可测集. $g(x, u)$ $(x\in\Omega, |u|<\infty)$ 是Caratheodory 函数. 我们假定由它确定的 Caratheodory 映射 $G(u(x))=g(x, u(x))$映$L^p(\Omega)$ $(p\geqslant 2)$到$L^q(\Omega)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 此时必有

$$
|g(x, u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1} \tag{1·11}
$$

其中 $a(x)\in L^q(\Omega)$，$b>0$，见第一章定理 1·1 和定理 1·2 及其后面的说明.

**定理 1·6** 设 Caratheodory 函数 $g$ 满足(1·11)式，则由它所确定的映射 $G(u(x))=g(x, u(x))$是 $L^p(\Omega)$ 上的梯度映射，其势泛函为

$$\varphi(u)=\int_{\Omega}dx\int_{0}^{u(x)}g(x,z)\,dz \quad (u\in L^{p}(\Omega))$$

而且 $\varphi$ 是 $F$-可微分的.

**证明** 受(1·8)式的启发，在那里令 $y=\theta$，$\varphi(y)=0$，$T=G$，考虑

$$\varphi(u)=\int_{0}^{1}(G(tu),u)\,dt, \qquad u\in L^{p}(\Omega)$$

由 Fubini 定理，有

$$\varphi(u)=\int_{0}^{1}\int_{\Omega}g(x,tu(x))u(x)\,dx\,dt$$

$$=\int_{\Omega}\int_{0}^{1}g(x,tu(x))u(x)\,dt\,dx$$

作代换 $tu(x)=z$，得

$$\varphi(u)=\int_{\Omega}dx\int_{0}^{u(x)}g(x,z)\,dz \tag{1·12}$$

下证 $\varphi(u)$ 是 $F$-可微的，且 $D\varphi=G$. 为此，令

$R(u)h=\varphi(u+h)-\varphi(u)-(Gu,h)$，$u$，$h\in L^{p}(\Omega)$ 从 (1·12) 式得

$$R(u)h=\int_{\Omega}h(x)\,dx\int_{u(x)}^{u(x)+h(x)}(g(x,z)-g(x,u(x)))\,dz$$

令 $z=u(x)+th(x)$，得

$$R(u)h=\int_{\Omega}h(x)\,dx\int_{0}^{1}(g(x,u(x)+th(x))-g(\ ,u(x))\,dt$$

因积分内的被积函数几乎对所有的 $x\in\Omega$，关于 $t$ 连续，对它应用积分中值定理就有

$$R(u)h=\int_{\Omega}(g(x,u(x)+\tau h(x))-g(x,u(x)))h(x)\,dx$$

$$=\int_{\Omega}(G(u+\tau h)(x)-(Gu)(x))h(x)\,dx$$

$$=(G(u+\tau h)-G(u),h), \qquad 0<\tau<1$$

由此得

$$|R(u)h| \leqslant \|G(u+\tau h)-G(u)\|\|h\|$$

因算子 $G$ 连续，故 $|R(u)h|=o(\|h\|)$. 可见，泛函 $\varphi$ 是 $F$-可微分的，且 $D\varphi=G$. 更有 $\operatorname{grad}\varphi(u)=G(u)$.

证毕

现在我们结合具体例子讨论定理 1·3 的(1·6) 式的含意. 为此，我们在向量函数空间中考虑 Caratheodory 映射 $G=(G_1, G_2, \cdots, G_n)$，其中

$$(G_i u)(x)=g_i(x; u_1(x), u_2(x) \cdots u_n(x))$$

$$u(x)=(u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)) \in L^{p, n}(\Omega) \quad (p \geqslant 2)$$

$$Gu \in L^{q, n}(\Omega) \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

关于 $L^{p, n}(\Omega)$，$L^{q, n}(\Omega)$ 和映射 $G$ 的定义和性质与 $L^q(\Omega)$，$L^q(\Omega)$ 和第一章所述的 Caratheodory 映射是完全平行的. 只不过前者是由向量函数组成的，而后者是由单个函数组成的. 假定 $G$: $L^{p, n}(\Omega) \rightarrow L^{q, n}(\Omega)$ 连续. 下面我们着手研究映射 $G$ 为梯度映射的条件. 设

$$\frac{\partial}{\partial u_k} g_i(x; u_1, u_2, \cdots u_n) \quad (i, k=1, 2, n)$$

不仅存在，而且对 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 连续. 对固定的 $v(x)=(v_1(x), v_2(x), \cdots, v_n(x)) \in L^{p, n}(\Omega)$，记

$$H_i(u, v)=\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_k} g_i(x; u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)) v_k(x) \qquad (1 \cdot 13)$$

又设

$$H(u, v)=(H_1(u, v), H_2(u, v), \cdots, H_n(u, v)) \qquad (1 \cdot 14)$$

是从 $L^{p, n}(\Omega)$ 到 $L^{q, n}(\Omega)$ 内关于 $u$ 的半连续算子. 这样，由 Taylor 公式得

$$g_i(x;u_1+tv_1,\cdots,u_n+tv_n)-g_i(x;u_1,\cdots,u_n)$$
$$=t\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_k}g_i(x;u_1+t\theta(x)v_1,\cdots,u_n+t\theta(x)v_n)v_k(x)$$
$$0<\theta(x)<1$$

因为 $v\in L^{p,n}(\Omega)$ 是固定的，所以

$$\lim_{t\to 0}\|t\theta(x)v_k(x)\|=0$$

从而，

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[G_i(u+tv)-G_i(u)]$$
$$=\lim_{t\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_k}g_i(x;u_1(x)+t\theta(x)v_1(x),\cdots,u_n(x)+t\theta(x)v_n(x))v_k(x)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_k}g_i(x;u_1(x),\cdots,u_n(x))v_k(x)$$
$$=H_i(u,v),\qquad i=1,\cdots,n$$

实际上，我们已经证明了映射 $G$ 的 Gâteaux 微分存在且

$$dG(u)v=(H_1(u,v),H_2(u,v),\cdots,H_n(u,v))=H(u,v)\tag{1·15}$$

于是，按定理 1·3，映射 $G$ 是梯度映射的充要条件是对任何 $v,\ w\in L^{p,n}(\Omega)$，有

$$(dG(v)v,w)=(dG(u)w,v)$$

由(1·13)-(1·15)得

$$\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial u_i}g_k(x;u_1(x),\cdots,u_n(x))$$
$$-\frac{\partial}{\partial u_k}g_i(x;u_1(x),\cdots,u_n(x))\Big)v_i(x)w_k(x)dx=0$$

因为 $v_i(x)$ 和 $w_k(x)$ 是任意的，所以从上式得

$$\frac{\partial}{\partial u_i}g_k(x;u_1,\cdots,u_n)=\frac{\partial}{\partial u_k}g_i(x;u_1,\cdots,u_n),\ (i,k=1,\cdots,n)$$
(1·16)

总之，在以上所设条件下，向量函数

$$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$$

构成梯度映射的充要条件是(1·16)成立. 当 $n=3$ 时，这是经典场论中熟知的事实，并且还有，$(g_1,g_2,g_3,\cdots,g_n)$ 为有势场（梯度映射）的充要条件是存在函数 $V$，使得 $g_i=\frac{\partial V}{\partial u_i}(i=1,2,3)$. 完全类似地可以证明，$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$ 确定从 $L^{p,n}(\Omega)$ 到 $L^{q,n}(\Omega)$ 的梯度映射的充要条件是存在函数 $V(x;u_1,\cdots,u_n)$，使得

$$g_i(x;u_1,\cdots,u_n)=\frac{\partial}{\partial u_i}V(x;u_1,\cdots,u_n)\quad i=1,\cdots,n$$

## §2 弱下半连续泛函

数学分析中的 Weierstrass 定理是说：紧集上的连续函数必下方有界且达到下确界. 由于变分学、最优化和数学物理的需要，有必要把这一著名定理推广到无穷维空间. 仔细分析 Weierstrass 定理的证明会发现，只需假定函数下半连续就够了. 因为在证明存在最小值和最大值的过程中能够抽出收敛的子列起着中心作用，所以在列紧集上考虑泛函取极值就成为必要的了. 回想起自反 Banach 空间的有界集是弱列紧的，因此为了在有界序列式弱闭集上考虑泛函的极值，弱下半连续性概念自然显得重要. 不仅如此，近年来非线性泛函的弱下半连续性还是处理一些非线性偏微分方程解的存在问题的有力工具.

**定义 2·1** 设 $X$ 为线性赋范空间. 泛函 $\varphi:\Omega\subset X\to E^1$ 于 $x_0\in\Omega$ 称为弱下半连续的（弱上半连续的），是指 $\forall x_n\rightharpoonup x_0$, $x_n\in\Omega$, 有

$$\varphi(x_0)\leqslant\varliminf_n\varphi(x_n)\ (\varlimsup_n\varphi(x_n)\leqslant\varphi(x_0))$$

与以前关于集合的弱闭性概念一样，确切地说，这应为序列式弱下半连续．我们简称为弱下半连续．下面给出弱下半连续的一些充分必要条件．

**定理 2·1**(Vainberq, M.M., 1968) 设$X$为实线性赋范空间，$\Omega\subset X$ 是序列式弱闭集．则 $\varphi:\Omega\to E^1$ 在$\Omega$上是弱下半连续的当且仅当对每一 $r\in E^1$，$e_r=\{x\mid x\in\Omega,\varphi(x)\leqslant r\}$ 是序列式弱闭的．

**证明** 必要性．设$\varphi$在$\Omega$上弱下半连续，$r\in E^1$．任取 $\{x_n\}\subset e_r$，$x_n\rightharpoonup x_0\in\Omega$．于是

$$\varphi(x_0)\leqslant\varliminf_n\varphi(x_n)$$

因 $x_n\in e_r$，故 $\varphi(x_n)\leqslant r\ (n\in\mathscr{N})$，从而 $x_0\in e_r$．

充分性．设对每一 $r\in E^1$，$e_r$ 是序列式弱闭的．任取$\{x_n\}\subset\Omega$，$x_n\rightharpoonup x_0\in\Omega$．令 $c=\varliminf_n\varphi(x_n)$．倘若 $c=-\infty$，则$\forall r\in E^1$，存在子列$\{x_{n_k}\}$，使得 $\varphi(x_{n_k})<r$．于是由于 $e_r$ 是序列式弱闭的及 $x_{n_k}\rightharpoonup x_0$，得 $x_0\in e_r$，这矛盾说明 $c>-\infty$．

假若$\varphi$不是弱下半连续的，则存在 $d>0$ 及$\{x_n\}\subset\Omega$，$x_n\rightharpoonup x_0\in\Omega$，使 $\varphi(x_0)>\varliminf_n\varphi(x_n)+d$．记 $c=\varliminf_n\varphi(x_n)$，则存在子列$\{x_{n_k}\}$，使 $\varphi(x_{n_k})\leqslant c+\frac{d}{2}$．记 $b=c+\frac{d}{2}$．按假定 $e_b$ 是序列式弱闭的，从 $x_{n_k}\in e_b\quad(k\in\mathscr{N})$ 及 $x_n\rightharpoonup x_0$，得 $x_0\in e_b$，即 $\varphi(x_0)\leqslant b=c+\frac{d}{2}$，矛盾．

证毕

下面对 $G$-可微泛函给出用其梯度映射所满足的条件来表达它的弱下半连续性．

**定理 2·2** 设$X$是实线性赋范空间．$\Omega\subset X$ 是凸开集，$\varphi$:

$\Omega\to E^1$ 在 $\Omega$ 上 $G$-可微且

$$\varphi(y)-\varphi(x)\geqslant(d\varphi(x),y-x)\quad\forall x,y\in\Omega$$

则 $\varphi$ 在 $\Omega$ 上弱下半连续.

**证明** 设 $\{x_n\}\subset\Omega$, $x_n\rightharpoonup x_0\in\Omega$. 根据假设,有

$$\varphi(x_n)-\varphi(x_0)\geqslant(d\varphi(x_0),x_n-x_0),\ \forall n\in\mathcal{N}$$

从而

$$0=\lim_n(d\varphi(x_0),x_n-x_0)=\varliminf_n(d\varphi(x_0),x_n-x_0)$$
$$\leqslant\varliminf_n(\varphi(x_n)-\varphi(x_0))$$

这表明

$$\varphi(x_0)\leqslant\varliminf_n\varphi(x_n)$$

证毕

**定理 2·3** 设 $X$ 是实线性赋范空间, $\Omega\subset X$ 是凸开集, $\varphi:\Omega\to E^1$ 在 $\Omega$ 上 $G$-可微且

$$(d\varphi(x)-d\varphi(y),x-y)\geqslant0\quad\forall x,y\in\Omega$$

则 $\varphi$ 在 $\Omega$ 上弱下半连续.

**证明** 由 Lagrange 公式,对任何 $x,y\in\Omega$ 有

$$\varphi(y)-\varphi(x)=(d\varphi(x+\tau(y-x)),y-x),\quad\tau\in(0,1)\tag{2·1}$$

由假定

$$(d\varphi(x+\tau(y-x))-d\varphi(x),\tau(y-x))\geqslant0$$

两端除以 $\tau$, 从(2·1)式得

$$\varphi(y)-\varphi(x)\geqslant(d\varphi(x),y-x)$$

根据定理 2·2 知,结论为真.

证毕

**定理 2·4** 设 $X$ 是实线性赋范空间. $\Omega\subset X$ 是凸开集, $\varphi:\Omega\to E^1$ 在 $\Omega$ 上二阶 $G$-可微且

$$d^2\varphi(x)h^2\geqslant0\quad\forall x\in\Omega,h\in X\tag{2·2}$$

则 $\varphi$ 在 $\Omega$ 上是弱下半连续的.

**证明** 由泛函的 Lagrange 公式，$\forall x, y\in\Omega$ 有

$$\varphi(y)-\varphi(x)=(d\varphi(x+\tau(y-x)), y-x), \tau\in(0,1) \qquad (2\cdot3)$$

对泛函 $(d\varphi(\cdot), y-x)$ 再应用 Lagrange 公式，有

$$(d\varphi(x+\tau(y-x)), y-x)-(d\varphi(x), y-x)$$
$$=\tau d^2\varphi(x+\tau'\tau(y-x))(y-x)^2, \quad \tau'\in(0,1) \qquad (2\cdot4)$$

从 $(2\cdot2)$，$(2\cdot3)$，$(2\cdot4)$ 得

$$\varphi(y)-\varphi(x)\geqslant(d\varphi(x), y-x)$$

再由定理 $2\cdot2$ 知，结论为真.

证毕

**例 1** 设 $X$ 是线性赋范空间，则 $\varphi(x)=\|x\|(x\in X)$ 是弱下半连续的.

设 $x_n\rightharpoonup x$，则对任何 $f\in X^*$，有 $f(x_n)\to f(x)$. 由 Hahn-Banach 定理，有 $f_0\in X^*$，$\|f_0\|=1$，使得 $f_0(x)=\|x\|$. 于是

$$\|x_n\|=\|f_0\|\|x_n\|\geqslant|f_0(x_n)|\to|f_0(x)|=\|x\|$$

从而有 $\quad \varliminf_{n}\|x_n\|\geqslant\|x\|$.

**例 2** 设 $A$ 是实 Hilbert 空间中的正的自共轭算子. 第一章 §2例 4 已证得

$$Ax=\frac{1}{2}\operatorname{grad}\langle Ax, x\rangle$$

因为 $A$ 是正的线性算子，故满足

$$\langle Ax-Ay, x-y\rangle=\langle A(x-y), x-y\rangle\geqslant0$$

由定理 $2\cdot3$，$\varphi(x)=\langle Ax, x\rangle$ 是弱下半连续的.

**例 3** 设 $\Omega\subset E^n$ 是有界的 Lebesgue 可测集，Caratheodory 函数 $g(x,u)$ 几乎对每一 $x\in\Omega$ 是 $u$ 的不减函数. 又设

$$|g(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1}, \quad a(x)\in L^q(\Omega), b>0,$$

则 Caratheodory 映射 $Gu(x)=g(x,u(x))$ 映 $L^p(\Omega)$ 到 $L^q(\Omega)$. 本

章定理 1·6 已证明它的势泛函为

$$\varphi(u)=\int_{\Omega}dx\int_{0}^{u(x)}g(x,z)\,dz$$

今证 $\varphi$ 在 $L^p(\Omega)$ 上是弱下半连续的. 事实上, 由于

$$\operatorname{grad}\varphi(u)=g(x,u(x))=Gu(x)$$

及几乎对所有 $x\in\Omega$, $g(x,u)$ 不减, 所以

$$(Gu-Gv,u-v)$$

$$=\int_{\Omega}(g(x,u(x))-g(x,v(x)))(u(x)-v(x))\,dx\geqslant 0$$

即泛函 $\varphi$ 满足定理 2·3 的条件, 故 $\varphi$ 弱下半连续.

## §3 无条件极值

泛函的极值和条件极值源于变分学, 本节首先类比古典分析建立泛函极值的必要条件, 然后对弱下半连续泛函给出广义 Weierstrass 定理和一些无条件极值的存在条件.

### 3·1 无条件极值的必要条件

**定义 3·1** 设 $X$ 是实线性赋范空间, 称泛函 $\varphi:\Omega\subset X\to E^1$ 在 $x_0\in\Omega$ 处取无条件局部极小(极大), 是指存在 $x_0$ 的邻域 $U(x_0)$, 使得对于 $\Omega\cap U(x_0)$ 中的一切 $x$, 有

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)\quad(\varphi(x)\leqslant\varphi(x_0))$$

无条件局部极大值与无条件局部极小值统称为无条件局部极值.

**定理 3·1** 设 $X$ 为实线性赋范空间, $\varphi:\Omega\subset X\to E^1$ 在 $x_0\in\Omega$ 处有 $G$-变分且 $\varphi$ 在 $x_0$ 处取无条件局部极值, 则对于任意的 $h\in X$, $\delta\varphi(x_0)h=0$.

**证明** 不妨设 $\varphi$ 在 $x_0$ 处取无条件局部极小值. 于是, 存在 $x_0$

的邻域 $U(x_0)$，满足

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) \quad (x \in \Omega \cap U(x_0))$$

设给定 $h \in X$. 因为 $x_0$ 是 $\Omega$ 的 1-内点，故存在 $\alpha = \alpha(h) > 0$，使当 $|t| < \alpha$ 时，有 $x_0 + th \in U(x_0) \cap \Omega$. 令

$$f_h(t) = \varphi(x_0 + th) \quad (|t| < \alpha)$$

则 $f_h(t) \geqslant f_h(0) \quad (|t| < \alpha)$，即实变量实函数 $f_h(t)$ 在 $t=0$ 处取局部极小值. 故 $f'_h(0) = 0$. 由此得出

$$\begin{aligned}\delta\varphi(x_0)h &= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x_0 + th) - \varphi(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f_h(t) - f_h(0)}{t} = f'_h(0) = 0\end{aligned}$$

证毕

**推论** 假设除满足定理 3·1 的条件外，泛函 $\varphi$ 在 $x_0 \in \Omega$ 处 $G$-可微分，则 $d\varphi(x_0) = 0$.

**证明** 因为此时 $x_0$ 是 $\Omega$ 的内点，$\delta\varphi(x_0)$ 是 $X$ 上的有界线性泛函，$\delta\varphi(x_0) = d\varphi(x_0)$. 故 $d\varphi(x_0) = 0$.

证毕

下面介绍定理 3·1 在变分学上的应用. 在此先给出一条著名的变分学基本引理.

**变分学基本引理** 设 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 如果对在两端点取零值（即 $\eta(a) = \eta(b) = 0$）的任何连续可微函数 $\eta(x)$，都有

$$\int_a^b \varphi(x)\eta(x)\,dx = 0$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为零.

**证明** 用反证法. 若 $\varphi(x)$ 在某点 $x_0 \in [a,b]$ 处不为零，不妨设 $\varphi(x_0) = c > 0$. 由 $\varphi(x)$ 的连续性，可在 $[a,b]$ 内选出 $x_0$ 的邻域

$(x', x'')$，使得当 $x' \leqslant x \leqslant x''$ 时，$\varphi(x) \geqslant \frac{c}{2}$. 现在取

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-x')^2(x-x'')^2, & x' \leqslant x \leqslant x'' \\ 0 \quad , & \text{否则} \end{cases}$$

显然 $\eta(a) = \eta(b) = 0$，$\eta(x)$ 连续可微，而积分

$$\int_a^b \varphi(x)\eta(x)\,dx \geqslant \frac{c}{2}\int_{x'}^{x''} (x-x')^2(x-x'')^2 dx > 0$$

与假设矛盾，所以必有 $\varphi(x) \equiv 0$.

证毕

这条引理很容易推广到 $n$ 重积分的情形，留给读者作为练习。

设 $\Omega$ 是 $E^n$ 中这样的区域，$\Omega$ 上 Gauss 公式成立，$\partial\Omega$ 是 $\Omega$ 的边界. 记 $C^1(\bar{\Omega})$ 是 $\bar{\Omega}$ 上具有一阶连续偏导数的函数全体，定义 $C^1(\bar{\Omega})$ 上的泛函

$$J(u) = \int_\Omega F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) dx$$

其中 $F: \bar{\Omega} \times E^{n+1} \to E^1$ 有如下连续的一阶和二阶偏导数:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u_k}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u_k \partial u_j} \quad (i, j, k = 1, \cdots, n)$$

这里规定 $u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$.

设 $\Gamma \subset \partial\Omega$，记 $X = \{u \mid u \in C^1(\bar{\Omega}),\ u(x)|_{x \in \Gamma} = 0\}$，$|u'(x)| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |u_k(x)|$. 令 $\|u\| = \max\{\max\limits_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|, \max\limits_{x \in \bar{\Omega}} |u'(x)|\}$，容易验证 $(X, \|\cdot\|)$ 构成实线性赋范空间，且泛函 $J$ 在 $X$ 上是 $G$-可微分的. 记 $C^2(\Omega)$ 是 $\Omega$ 上具有各个二阶连续偏导数的函数的全体.

设 $J$ 在 $u_0 \in X \cap C^2(\Omega)$ 处取局部极值，则对于任意的 $h \in X$，$\delta J(u_0)h = 0$. 经计算，有

$$\delta J(u)h = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[J(u+th) - J(u)] = \frac{d}{dt} J(u+th)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\Omega} F\left(x_1, \cdots, x_n, u + th; \frac{\partial u}{\partial x_1} + t\frac{\partial h}{\partial x_1},\right.$$

$$\left.\left. \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} + t\frac{\partial h}{\partial x_n}\right) dx \right|_{t=0}$$

$$= \int_{\Omega}\left[\frac{\partial F}{\partial u} h + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_k}\frac{\partial h}{\partial x_k}\right] dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_k}\frac{\partial h}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial u_k} h\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial u_k}\right) h$$

由 Gauss 公式，又有

$$\delta J(u)h = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial u_k}\right) h dx + \int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial u_k} h\right) dx$$

$$= \int_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial u_k}\right) h dx + \int_{\partial\Omega}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_k}\alpha_k h ds$$

$$= \int_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial u_k}\right) h dx + \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_k}\alpha_k h ds$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是 $\partial\Omega$ 上外单位法向量. 因此，$u_0$ 满足

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial u_k}\right) h dx + \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_k}\alpha_k h ds = 0 \qquad (3\cdot1)$$

特别地，对满足 $h|_{\partial\Omega} = 0$ 的任何 $h \in X$，(3·1) 式左端第二项等于零，从而有

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial u_k}\right) h dx = 0$$

根据变分学基本引理，得

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial u_k} = 0 \qquad (3\cdot2)$$

即，若泛函 $J(u)$ 在 $u_0 \in X \cap C^2(\Omega)$ 处取局部极值，则 $u_0$ 满足 Euler-

-Lagrange 微分方程(3.2)，简称 Euler 方程. 此外，由于 $h$ 在 $\partial\Omega\setminus\Gamma$ 上的值仍可自由选择，取如此的 $h\in X$，使得 $h|_{\partial\Omega\setminus\Gamma}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_k}\alpha_k$，则由(3·1) 式并注意到其第一项已为零. 得自然边界条件

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_k}\alpha_k\right)\Bigg|_{\partial\Omega\setminus\Gamma}=0 \tag{3·3}$$

总之，若 $J(u)$ 在 $u_0$ 处取局部极值，则 $u_0$ 是 Euler 微分方程(3·2)的解且满足自然边界条件(3·3).

### 3·2 无条件极值的存在性

下列结果是 Weierstrass 定理的推广.

**定理 3·2** 设 $X$ 是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$ 是弱列紧的序列式弱闭集. 又设泛函 $\varphi:\Omega\to E^1$ 在 $\Omega$ 上弱下半连续，则 $\varphi$ 在 $\Omega$ 上必下方有界且达到下确界，即存在 $u_0\in\Omega$，使得

$$\varphi(u_0)=\inf_{x\in\Omega}\varphi(x)$$

**证明** 倘若 $c=\inf\limits_{x\in\Omega}\varphi(x)=-\infty$，则存在 $\{x_n\}\subset\Omega$，使得 $\varphi(x_n)<-n\,(n\in\mathcal{N})$. 因为 $\Omega$ 弱列紧，故存在 $\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\rightharpoonup x_0$. 又因 $\Omega$ 序列式弱闭，故 $x_0\in\Omega$. 由于 $\varphi$ 的弱下半连续性，得 $\varphi(x_0)\leqslant\varliminf\limits_{k}\varphi(x_{n_k})$. 从而 $\varphi(x_0)=-\infty$. 这是矛盾的. 因此，$\varphi(x)$ 在 $\Omega$ 上下方有界. 假设对 $\{u_n\}\subset\Omega$，有 $\varphi(u_n)\to c$. 于是存在子列 $u_{n_j}\rightharpoonup u_0\in\Omega$. 因而有

$$c\leqslant\varphi(u_0)\leqslant\varliminf_{j}\varphi(u_{n_j})=\lim_{n}\varphi(u_n)=c$$

即 $\varphi(u_0)=c$.

证毕

**推论** 设$X$是实自反 Banach 空间，$K\subset X$是序列式弱闭集，$\varphi$是$K$上的下半连续泛函. 又设$\varphi$是模强制的，即

$$\varphi(x)\to+\infty \qquad 当\|x\|\to\infty, x\in K \tag{3·4}$$

则存在$x_0\in K$，使得

$$\varphi(x_0)=\inf_{x\in K}\varphi(x)$$

**证明** 由条件(3·4)，可取$u_0\in K$，使得$M=\varphi(u_0)>0$. 再根据(3·4)，存在$r>0$，使当$\|x\|>r$时，$\varphi(x)>M$. 因为自反 Banach 空间的闭球是弱列紧的序列式弱闭集，故$K\cap\bar{B}(\theta,r)$也是这样的集，记$\Omega=K\cap\bar{B}(\theta,r)$. 由定理 3·2，有$x_0\in\Omega$，使$\varphi(x_0)=\inf\limits_{x\in\Omega}\varphi(x)$. 显然$u_0\in\Omega$. 所以当$x\in K\setminus\Omega$时，

$$\varphi(x_0)\leqslant\varphi(u_0)=M<\varphi(x)$$

因此就有

$$\varphi(x_0)=\inf_{x\in K}\varphi(x)$$

证毕

**定理 3·2** 给出了在弱列紧且序列式弱闭集$\Omega$上泛函有最小值的条件. 如果最小值点$x_0$是$\Omega$的内点，并且$\varphi$在$x_0$处$G$-可微分，则由定理 3·1 的推论，$d\varphi(x_0)=\theta$. 满足$d\varphi(x)=\theta$的点$x$，称为泛函$\varphi$的临界点. 定理 3·1 说明了无条件极值点是泛函的临界点. 如果$T$是梯度映射，$Tx=\text{grad}\varphi(x)$，那么求解方程

$$Tx=\theta \tag{3·5}$$

就化成求泛函$\varphi$的临界点. 变分方法的基本思想是，把求方程(3·5)的解归结为求$T$的势泛函的临界点.

**定义 3·2** 设$X$是实线性赋范空间，泛函$\varphi:\Omega\subset X\to E^1$在无界集$\Omega$上称为强制的，是指存在函数$c:[0,\infty]\to E^1$，$c(t)\to+\infty(t\to+\infty)$，使

$$\varphi(x)\geqslant c(\|x\|) \quad \forall x\in\Omega$$

下面给出泛函是强制的两个充分条件.

**定理 3·3** 设$X$是实 Banach 空间, $\varphi: X\to E^1$ 在$X$上$G$-可微, $d\varphi$ 有界且存在 $c>0$, 使

$$(d\varphi(x), x)\geqslant c\|x\|^2 \quad \forall x\in X$$

又 $d\varphi(x)$ 在 $x=\theta$ 处半连续, 则 $\varphi$ 强制.

**证明** 由

$$(d\varphi(tx), x)=\frac{d}{dt}\varphi(tx)$$

得

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\varphi(\theta)+\int_0^1(d\varphi(tx), x)\,dt\\&=\varphi(\theta)+\int_0^1(d\varphi(tx),\ tx)\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

令 $t=\frac{s}{\|x\|}$, 则

$$\int_0^1(d\varphi(tx),\ tx)\frac{dt}{t}=\int_0^{\|x\|}\left(d\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}s\right),\ \frac{x}{\|x\|}s\right)\frac{ds}{s}$$

根据假定, 存在 $R>0, K>0$, 使当 $s\geqslant R$ 时, 有

$$\frac{1}{s}\left(d\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}s\right),\ \frac{x}{\|x\|}s\right)\geqslant 1$$

且当 $0\leqslant s\leqslant R$ 时, 有

$$\left\|d\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}s\right)\right\|\leqslant K$$

总之 有

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(\theta)+\|x\|-RK-R$$

证毕

**定理 3·4** 设$X$是实 Banach 空间. $\varphi: X\to E^1$ 在$X$上是二阶$G$-可微分的, 满足

$$d^2\varphi(x)h^2\geqslant\|h\|g(\|h\|) \quad \forall x, h\in X$$

其中 $g:[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$ 连续，$g(r)\to+\infty(r\to+\infty)$，此外，$d\varphi(x)$ 在 $X$ 上半连续，则 $\varphi$ 强制.

**证明** 因 $d\varphi: X\to X^*$，对 $d\varphi(x)$ 应用 Taylor 公式（定理 1·2）：

$$(T(x+h),h)=(Tx,h)+\int_0^1 (dT(x+th)h,h)\,dt$$

即在上式中，令 $x=\theta, h=x, Tx=d\varphi(x)$，得

$$(d\varphi(x),\ x)=(d\varphi(\theta),\ x)+\int_0^1 d^2\varphi(tx)x^2\,dt$$

根据假设

$$(d\varphi(x),x)\geqslant\|x\|g(\|x\|)-\|x\|\|d\varphi(\theta)\|$$

再次应用 Taylor 公式，得

$$\varphi(x)=\varphi(\theta)+\int_0^1 (d\varphi(tx),tx)\,\frac{dt}{t}$$

$$\geqslant\varphi(\theta)+\int_0^1 (\|tx\|g(\|tx\|)-\|tx\|\|d\varphi(\theta)\|)\,\frac{dt}{t}$$

$$=\varphi(\theta)+\|x\|\left(\int_0^1 g(\|tx\|)\,dt-\|d\varphi(\theta)\|\right)$$

由于 $g(r)\to+\infty(r\to+\infty)$，故存在 $R>0$，使上式右端的括号内，对一切 $\|x\|\geqslant R$，至少大于 1，因此，当 $\|x\|\geqslant R$ 时，有

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(\theta)+\|x\|$$

证毕

设 $T$ 是梯度映射，现考虑方程 $Tx=\theta$ 的解的存在问题，其基本结果是下列定理.

**定理 3·5** 设 $X$ 为实自反 Banach 空间，$T: X\to X^*$ 是梯度映射，$T$ 的势函数 $\varphi$ 弱下半连续且强制，则方程 $Tx=\theta$ 有解.

**证明** 取 $m>\inf\limits_{x\in X}\varphi(x)$. 因为 $\varphi$ 强制，故存在 $R>0$，使当 $\|x\|\geqslant R$ 时，$\varphi(x)>m$. 由于 $B(\theta,R)$ 是弱列紧的序列式弱闭的，按定

理 3·2, 存在 $x_0$, $\|x_0\|\leqslant R$, 使得

$$\varphi(x_0)=\min_{\|x\|\leqslant R}\varphi(x)$$

于是,

$$Tx_0=\operatorname{grad}\varphi(x_0)=\theta.$$

证毕

**定理 3·6** 设 $X$ 为实自反的 Banach 空间, $\varphi: X\to E^1$ 在 $X$ 上二阶 $G$-可微, 且

$$d^2\varphi(x)h^2\geqslant\|h\|g(\|h\|),\quad \forall x, h\in X$$

其中 $g:[0, +\infty)\to[0, +\infty)$ 连续, $g(r)\to+\infty(r\to+\infty)$, 此外, $d^2\varphi(\cdot)h^2(h\in X)$ 在 $X$ 上是半连续的, 则 $\varphi$ 有临界点.

**证明** 根据定理 2·4, $\varphi$ 在 $X$ 上弱下半连续. 由定理 3·4 知, $\varphi$ 强制. 故从定理 3·5 知, $\varphi$ 有临界点.

证毕

## §4 单调梯度映射

本节讨论具有凸势泛函的单调映射.

**定义 4·1** 设 $X$ 是实线性空间, $\Omega\subset X$ 为凸子集, 泛函 $\varphi:\Omega\to E^1$ 称为在 $\Omega$ 上是凸的, 是指

$$\varphi(tx+(1-t)y)\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y),\quad \forall t\in[0,1],\ x, y\in\Omega$$

若只在 $x=y$ 时取等号, 那么称 $\varphi$ 是严格凸的.

首先考虑泛函的凸性与弱下半连续性的关系.

**定理 4·1** 设 $X$ 是实线性赋范空间, $\Omega\subset X$ 为闭凸集, $\varphi:\Omega\to E^1$ 在 $\Omega$ 上凸且连续, 则 $\varphi$ 在 $\Omega$ 上弱下半连续.

**证明** 对任何 $r\in E^1$, 集 $e_r=\{x\,|\,x\in\Omega,\ \varphi(x)\leqslant r\}$ 是凸集. 事实上, $\forall x, y\in e_r$, 当 $t\in[0,1]$时,

$$\varphi(tx+(1-t)y)\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$$

$$\leqslant tr+(1-t)r=r$$

故 $tx+(1-t)y\in e_r$. 此外,根据 $\varphi$ 的连续性,$e_r$ 闭,因此,再据第二章定理 7·2 的推论,它也是序列式弱闭的. 由定理 2·1 知定理结论为真.

证毕

下面考虑可微分的凸泛函.

**定理 4·2** (Kachurovskii, R. I., 1960) 设 $X$ 是实线性赋范空间,$\Omega\subset X$ 是凸开集,$\varphi:\Omega\to E^1$ 在 $\Omega$ 上 $G$-可微,则下列结论等价:

(i) $\varphi$ 在 $\Omega$ 上凸;

(ii) $\varphi(x)-\varphi(y)\geqslant(d\varphi(y),x-y)$, $x,y\in\Omega$;

(iii) $(d\varphi(y)-d\varphi(x),y-x)\geqslant0\quad\forall x,y\in\Omega$.

**证明** 由(i)推(ii). 取 $x,y\in\Omega$, $t\in(0,1)$. 由凸性得

$$\varphi(x)-\varphi(y)\geqslant\frac{1}{t}(\varphi(y+t(x-y))-\varphi(y))$$

据 $\varphi$ 的 $G$-可微分性,当 $t\to0$ 时,右端极限存在. 由此,

$$\varphi(x)-\varphi(y)\geqslant(d\varphi(y),x-y)\tag{4·1}$$

由(ii)推(iii). 在(4·1)中交换 $x,y$,得

$$\varphi(y)-\varphi(x)\geqslant(d\varphi(x),y-x)\tag{4·2}$$

由(4·1)又有

$$\varphi(x)-\varphi(y)\geqslant(-d\varphi(y),y-x)\tag{4·3}$$

(4·2)加(4·3),得

$$0\geqslant(d\varphi(x)-d\varphi(y),\ y-x)$$

或者

$$(d\varphi(x)-d\varphi(y),\ y-x)\geqslant0$$

由(iii)推(i). 由 Lagrange 公式,有

$$\varphi(y)-\varphi(x)=(d\varphi(x+\tau(y-x)),\ y-x)$$

$$=\frac{1}{\tau}(d\varphi(x+\tau(y-x))-d\varphi(x),\tau(y-x))$$

$$+(d\varphi(x),\ y-x)$$

$$\geqslant(d\varphi(x),\ y-x)$$

即(ii):

$$\varphi(y)-\varphi(x)\geqslant(d\varphi(x),\ y-x) \tag{4·4}$$

成立. 令 $u=tx+(1-t)y\quad(\forall x,y\in\Omega,\ t\in[0,1])$, 应用(4·4)得

$$\varphi(x)-\varphi(u)\geqslant(d\varphi(u),\ x-u)$$

$$\varphi(y)-\varphi(u)\geqslant(d\varphi(u),\ y-u)$$

此二不等式的凸组合是

$$t(\varphi(x)-\varphi(u))+(1-t)(\varphi(y)-\varphi(u))$$

$$\geqslant(d\varphi(u),t(x-u)+(1-t)(y-u))=0$$

因此

$$\varphi(u)=\varphi(tx+(1-t)y)\leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$$

证毕

对 $G$-可微泛函 $\varphi$ 来说, 导映射的什么性质相应于 $\varphi$ 是凸泛函呢? 定理 4·2 之(i)和(iii)表明, $\varphi$ 是凸泛函当且仅当导映射 $d\varphi$ 是单调的(其含义见下一定理的说明, 详细讨论在第五章). 定理 4·2 称为 Kachurovskii 定理.

**定理 4·3** 设 $X$ 是实线性赋范空间. $\Omega\subset X$ 是凸开集, $\varphi:\Omega\to E^1$ 在 $\Omega$ 上二次 $G$-可微, 则 $\varphi$ 是 $\Omega$ 上的凸泛函当且仅当 $d^2\varphi(x)h^2\geqslant0,\forall x\in\Omega,h\in X$.

**证明** 必要性. 设 $\varphi$ 凸, 则对任何 $x\in\Omega,h\in X$, 其中 $x+h\in\Omega$. 由定理 4·2 之(iii), 有

$$d^2\varphi(x)h^2=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}(d\varphi(x+th)-d\varphi(x)),\ h\right)\geqslant0$$

充分性. 由所设条件和定理 2·4 之证明, 得

$$\varphi(x)-\varphi(y)\geqslant(d\varphi(y),\ x-y)$$

再从定理 4·2 之(ii)，知 $\varphi$ 凸；

证毕

若 $d^2\varphi(x)h^2\geq 0$，则由定理 4·2、4·3 及定理 2·2-2·4 知，在凸开集上 $G$-可微分的凸泛函是弱下半连续的. 而凸泛函的其它性质，又可保证其最小值的唯一性.

**定理 4·4** 设 $X$ 是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$ 是凸集，$\varphi:\Omega\to E^1$ 严格凸，则最多存在一个 $\omega\in\Omega$，使

$$\varphi(\omega)=\inf_{x\in\Omega}\varphi(x)$$

**证明** 假若在 $\Omega$ 内存在 $u\neq v$，使

$$\varphi(u)=\varphi(v)=\inf_{x\in\Omega}\varphi(x)$$

则对每一 $t\in(0,1)$，

$$\varphi(tu+(1-t)v)<t\varphi(u)+(1-t)\varphi(v)=\inf_{x\in\Omega}\varphi(x)$$

此与 $u,v$ 是最小值点相矛盾.

证毕

以上我们给出了梯度映射和势泛函之间的关系，也引出了一种具有特殊性质的凸泛函. 直接从定理 4·2 之(iii)出发，我们称算子 $T:\Omega\subset X\to X^*$ 在 $\Omega$ 上单调，是指

$$(Tx-Ty,x-y)\geq 0\qquad \forall x,y\in\Omega$$

若等号仅当 $x=y$ 时成立，则称 $T$ 在 $\Omega$ 上严格单调，若存在 $c>0$，使

$$(Tx-Ty,x-y)\geq c\|x-y\|^2\qquad \forall x,y\in\Omega,$$

则称 $T$ 在 $\Omega$ 上强单调. 对线性算子 $T$ 来说，这些概念的条件分别成为 $(Tx,x)\geq 0$，$(Tx,x)>0(x\neq\theta)$ 及 $(Tx,x)\geq c\|x\|^2$.

我们指出，单调的梯度映射其势泛函是凸的和弱下半连续的；凸泛函的 $G$-导映射是单调的. 对 $G$-可微算子我们有下列各种单调性判别法.

**定理 4·5** 设$X$是实线性赋范空间，$\Omega\subset X$为凸开集，$T:\Omega\to X^*$在$\Omega$上$G$-可微．若对一切$x\in\Omega$，$dT(x)$严格单调，则$T$在$\Omega$上严格单调；若存在$c\geq 0$，使对一切$x\in\Omega$及$h\in X$有$(dT(x)h,\ h)\geq c\|h\|^2$，则当$c=0$时，$T$单调；当$c>0$时，$T$在$\Omega$上强单调；反之，若对某$c>0$，使

$$(Tx-Ty,x-y)\geq c\|x-y\|^2,\quad \forall x,y\in\Omega$$

则对同一$c$，也有$(dT(x)h,h)\geq c\|h\|^2,\forall x\in\Omega,h\in X$.

**证明** 对任何$x\in\Omega,h\in X$，其中$x+h\in\Omega$，从 Lagrange 公式我们有

$$(Tx-Ty,x-y)=(dT(y+\tau(x-y))(x-y),x-y)$$
$$(0<\tau<1)\qquad(4\cdot5)$$

因$dT(y+\tau(x-y))$是严格单调的，故$T$严格单调．若满足$(dT(x)h,h)\geq c\|h\|^2$，则从(4·5)式，当$c=0$时，$T$单调；当$c>0$时，$T$强单调．

反之，从单调性条件，有

$$(T(x+th)-Tx,th)\geq c\|th\|^2,\quad t\in(0,1)$$

除以$t^2$，令$t\to 0$得

$$(dT(x)h,h)\geq c\|h\|^2,\qquad \forall x\in\Omega,h\in X$$

证毕

现在利用前面所得到的结果来研究方程

$$Tx=\theta$$

的解的存在性，其中$T$是单调梯度映射．基本结果是以下定理．

**定理 4·6** 设$X$是实线性赋范空间，$T:X\to X^*$为单调梯度映射，$T$的势泛函$\varphi$强制，则方程$Tx=\theta$有解．

**证明** 因为$T$是单调的梯度映射，故从定理 2·3，$\varphi$弱下半连续．由定理 3·5 知，结论为真．

证毕

如果在定理 4·6 中,,$T$ 还是强单调的，则方程 $Tx=\theta$ 的解不仅存在而且还是唯一的. 这是因为若 $u\neq v$，满足 $Tu=\theta$, $Tv=\theta$，则与 $(Tu-Tv, u-v)>0$ 相矛盾.

**定理 4·7** 设 $X$ 为实 Hilbert 空间，$T: X\to X$ 为 $X$ 上的梯度映射，使 $-T$ 单调且其势泛函 $\varphi$ 满足

$$\varphi(x)\leqslant a\|x\|^2+b\|x\|^r+c \quad (x\in X)$$

其中 $b, c$ 是任意实数，$a<\frac{1}{2}$, $0<r<2$，则 $T$ 在 $X$ 内有不动点.

**证明** 显然 $I$ 是单调梯度映射. 因 $-T$ 单调，故 $I-T$ 为单调梯度映射，其势泛函为 $\psi(x)=\frac{1}{2}\langle x, x\rangle-\varphi(x)$. 根据 $\langle x, x\rangle=\|x\|^2$ 及 $\varphi(x)\leqslant a\|x\|^2+b\|x\|^r+c$, $a<\frac{1}{2}$，易知 $\varphi(x)$ 强制. 再从定理 4·6 结论为真.

证毕

## §5 Hammerstein 方程解的存在性

作为定理 4·6 的具体应用，我们先来考虑抽象的 Hammerstein 方程解的存在性. 然后把一些抽象的存在性结果应用到具体的 Hammerstein 积分方程上去.

本节恒设 $X$ 为自反 Banach 空间，算子 $G: X\to X^*$, $K\in\mathscr{B}(X^*, X)$. 证明抽象的 Hammerstein 方程

$$x-(K\circ G)x=\theta \qquad x\in X \tag{5·1}$$

有解的关键是把方程(5·1) 化成 Hilbert 空间中的一个等价方程。为此，我们对空间 $X$ 作如下假定：

($\mathrm{p}_1$) 存在 Hilbert 空间 $H$，使得 $X$ 是 $H$ 的稠子集，且存在 $c>0$，使得 $\|x\|_H\leqslant c\|x\|_X$ $(x\in X)$，此处 $\|\cdot\|_H$ 和 $\|\cdot\|_X$ 分别表示空间

$H$和$X$的范数.

在假定($p_1$)之下，泛函$\varphi\in H^*$在$X$上的限制$\varphi|_X$是$X^*$的元素. 因此,$\forall\varphi\in H^*, x\in X$有

$$(\varphi|_X, x)_{(X, X^*)}\leqslant\|\varphi\|_{H^*}\|x\|_H\leqslant c\|\varphi\|_{H^*}\|x\|_X$$

可见,$H^*\subset X^*$且$\|\varphi|_X\|_{X^*}\leqslant c\|\varphi\|_{H^*}$. 此外，因$X$自反,在$H^*$上取零值的$X^*$上的泛函必为零泛函.从而,由 Hahn-Banach 定理,$\overline{H}^*=X^*$,即$H^*$在$X^*$中稠密. 因$H^*=H$,故

$$X\subset H\subset X^*$$

$H$在$X^*$中稠密且$\|u\|_{X^*}\leqslant c\|u\|_H(u\in H)$.

($p_2$) $L=K|_H\in\mathscr{B}(H)$是自伴的且$\langle Lx, x\rangle\geqslant 0 \quad (x\in H)$.

按 Hilbert 空间线性算子理论，存在$L$的正平方根$L^{\frac{1}{2}}$，即$L=L^{\frac{1}{2}}\circ L^{\frac{1}{2}}$, $L^{\frac{1}{2}}$也自伴. 记$L^{\frac{1}{2}}=A$(见参考文献[6]的第二册，189—194). 有了以上准备,我们有下列的算子分解定理.

**定理5·1** 在假定($p_1$)和($p_2$)之下,存在$B\in\mathscr{B}(X^*, H)$，使得$B^*=A$且$K=B^*\circ B$.

**证明** 由假设($p_2$),存在$A=L^{\frac{1}{2}}\in\mathscr{B}(H)$,$A$自伴，$\langle Ax, x\rangle\geqslant 0$ ($x\in H$). 依假设($p_1$)所得之结论，存在$A$的唯一扩张$B\in\mathscr{B}(X^*, H)$. 从而,共轭算子$B^*\in\mathscr{B}(H, X)$.

今证$B^*=A$. 为此,任取固定的$x\in H$. 根据假设($p_1$),$H=H^*\subset X^*$, $\overline{H}^*=X^*$及算子扩张定理，泛函$(Ax, \cdot)_H$可扩张成$\varphi_x\in X^{**}$. 因$X$自反，故可视$\varphi_x$为$X$中的元素. 再注意到$X\subset H$,则对任何$y\in H$,有

$$\langle Ax, y\rangle_H=(\varphi_x, y)_{(X^*, X^{**})}=(\varphi_x, y)_{(X, X^*)}=\langle\varphi_x, y\rangle_H.$$

由此得$Ax=\varphi_x\in X(x\in H)$. 这意味着$R(A)\subset X$. 因此,$A\in\mathscr{B}(H, X)$. 此外,对固定的$x\in H$,$\langle y, Ax\rangle_H=\langle By, x\rangle_H$. 由于$H$在$X^*$中稠密,所以对任何$x\in H, y\in X^*$有

$$(y, Ax)_{(X, X^*)} = \langle By, x\rangle_H$$

从共轭算子之定义得

$$A = B^*.$$

最后，考虑算子 $B^*\circ B: X^* \to X$，显然它是线性连续算子. 因 $B|_H = A, B^* = A$，故对一切 $x\in H$，有

$$(B^*\circ B)x = A(Ax) = Lx$$

即 $(B^*\circ B)|_H = L = K|_H$. 由于 $H$ 在 $X^*$ 中稠密，故 $B^*\circ B = K$.

证毕

利用定理 5·1 所定义的算子 $A$ 与 $B$，在 Hilbert 空间 $H$ 考虑方程

$$u-(B\circ G\circ A)u = \theta \quad u\in H \tag{5·2}$$

两端作用 $A$，由定理 5.1 得

$$Au-(K\circ G)(Au) = \theta \tag{5·3}$$

以上说明，若 $u$ 是方程(5.2) 的解，则 $x = Au$ 是 Hammerstein 方程 (5·1)的解，因此，我们只需研究方程(5·2)的解的存在性. 下面我们利用梯度映射理论来处理方程(5·1).

**定理 5·2** 设 $G: X\to X^*$ 是梯度映射，则 $I-B\circ G\circ A: H\to H$ 也是梯度映射.

**证明** 设 $\varphi$ 为 $G$ 的势泛函，令

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\langle u, u\rangle - \varphi(Au) \qquad u\in H$$

其中 $A$ 如定理 5·1 中所定义. 因 $\varphi$ 是 $G$-可微的，$A\in\mathscr{B}(H, X)$ 及链锁规则，$\psi$ 也是 $G$-可微的且对任何 $u, h\in H$，有

$$\begin{aligned} d\psi(u)h &= (d\psi(u), h) \\ &= (u, h) - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi(Au+tAh)-\varphi(Au)) \\ &= (u, h) - (G(Au), Ah) \end{aligned}$$

$$= (u, h) - (G(Au), B^*h)$$

$$= (u - (B \circ G \circ A)u, h)$$

因此，$\psi$ 是 $I - B \circ G \circ A$ 的势泛函.

证毕

我们还需要关于算子的正平方根的一个结果.

**引理 5·1** 设 $X$ 为实 Hilbert 空间，$L: X \to X$ 是正的自共轭线性紧算子，则 $L$ 的正平方根 $L^{\frac{1}{2}}$ 也是线性紧算子.

**证明** 我们只需考虑 $X$ 是无穷维的情形. 记 $\mathcal{N}(L)$ 是 $L$ 的零空间，$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots \geqslant 0$ 是$L$的全体本征值，$\lambda_n \to 0$，$\{e_n\}$ 是相应于$\{\lambda_n\}$的全体就范直交本征元，则

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \forall x \in X$$

其中 $x_0 \in \mathcal{N}(L)$. 根据线性算子的谱理论，

$$Lx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

$$L^{\frac{1}{2}} x = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle e_n = S_n x + R_n x, \forall x \in X \tag{5·4}$$

式中 $S_n x = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle e_i$，$R_n x = \sum_{i=n+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle e_i$.

今证 $L^{\frac{1}{2}}$ 映有界集为列紧集. 设 $B$ 是 $X$ 的有界集，当 $x \in B$ 时，$\|x\| \leqslant M$. 由 Bessel 不等式，有

$$\|R_n x\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 \leqslant \lambda_{n+1} \|x\|^2, \quad \|S_n x\|^2 \leqslant \lambda_1 \|x\|^2$$

因为 $\lambda_n \to 0$，故存在 $n_0 \in \mathcal{N}$，使得当 $x \in B$ 时，有

$$\|R_{n_0} x\| \leqslant \sqrt{\lambda_{n_0}} M < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|S_{n_0} x\| \leqslant \sqrt{\lambda_1} M \tag{5·5}$$

把 $B_{n_0}=\{S_{n_0}x\mid x\in B\}$ 看作 $X$ 的 $n_0$ 维子空间 $E^{n_0}$ 中的子集，$E^{n_0}$ 的基底是 $e_1,\cdots,e_{n_0}$. 由(5·5)中后一个式子，$B_{n_0}$ 是 $E^{n_0}$ 中的有界集，即在 $E^{n_0}$ 中列紧，所以有 $B_{n_0}$ 的 $\frac{\varepsilon}{2}$-网 $\{y_1,\cdots,y_m\}$. 根据(5·4)和(5·5)，它是 $L^{\frac{1}{2}}(B)$ 的 $\varepsilon$-网.

证毕

现在回到抽象的 Hammerstein 方程解的存在问题.

**定理5·3** 设

(i) $X$ 为自反的 Banach 空间，存在 Hilbert 空间 $H$，使 $X$ 在 $H$ 中稠密且存在 $c>0$，使

$$\|x\|_H\leqslant c\|x\|_X \quad \forall x\in X$$

(ii) $K\in\mathscr{B}(X^*,X)$，$L=K|_H\in\mathscr{B}(H)$ 是正自伴的且 $L$ 为紧；

(iii) $G:X\to X^*$ 是梯度映射，其势泛函 $\varphi$ 连续，此外，

$$\varphi(x)\leqslant a\|x\|^2+b\|x\|^r+c, \quad \forall x\in X$$

其中 $b,c\in E^1$ 任意，$a\|L\|<\frac{1}{2}$，$0<r<2$，

则 Hammerstein 方程 $u-(K\circ G)u=\theta$ 有解.

**证明** 按定理5·2，映射 $I-B\circ G\circ A$ 是梯度映射，势泛函为 $\psi(u)=\frac{1}{2}\langle u,u\rangle-\varphi(Au)$，$u\in H$. $\psi$ 中第一项是弱下半连续的. 由引理5·1，因 $L$ 紧，故 $A=L^{\frac{1}{2}}$ 也紧，从而 $A$ 映弱收敛列为强收敛列. 而 $\varphi$ 连续，于是若 $u_n\rightharpoonup u$，$u_n,u\in X$，则 $\varphi(Au_n)\to\varphi(Au)$，$(n\to\infty)$. 当然 $-\varphi(Au)$ 也就把弱收敛列映成收敛列. 由此，$\psi(u)$ 也是弱下半连续的. 因 $\|L\|=\|A\|^2$ 及(iii)，有

$$\psi(u)\geqslant\frac{1}{2}\langle u,u\rangle-a\|Au\|_X^2-b\|Au\|_X^r-c$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{2}-a\|L\|\right)\|u\|_H^2-b\|A\|^r\|u\|_H^r-c$$

故 $\psi$ 强制. 由定理 3·5, 方程

$$u-(B\circ G\circ A)u=\theta$$

有解, 从而 $Au$ 为 $u-(K\circ G)u=\theta$ 之解.

证毕

若$-G$单调, 则可去掉关于 $K$ 的紧性假设.

**定理 5·4** 设在定理 5·3 中, 若不要求 $L$ 紧及势泛函连续, 而要求$-G$单调, 其余条件都满足, 则 Hammerstein 方程

$$u-(K\circ G)u=\theta$$

有解.

**证明** 不难验证此时梯度映射 $T=B\circ G\circ A$ 满足定理 4·7 之假设.

证毕

现在把上述关于抽象的 Hammerstein 方程解的存在性结果应用到具体的 Hammerstein 积分方程. 设 $\Omega\subset E^n$ 为有界 Lebesgue 可测集. 考虑非线性 Hammerstein 型积分方程:

$$u(x)-\int_\Omega K(x,y)g(y,u(y))dy=0,\quad x\in\Omega \tag{5·6}$$

**定理 5·5** 设

(i) 线性积分算子

$$(Ku)(x)=\int_\Omega K(x,y)u(y)dy\quad x\in\Omega$$

从 $L^q(\Omega)$ 到 $L^p(\Omega)$ 连续 $(p\geqslant 2, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ 且对一切 $(x,y)\in\Omega\times\Omega$, $K(x,y)=K(y,x)$, $K(x,y)\geqslant 0$;

(ii) Caratheodory 映射 $g$ 满足

$$|g(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1}\ (x,u)\in\Omega\times E \tag{5·7}$$

其中 $a(x)\in L^q(\Omega)$, $b>0$. 此外, 还满足

$$\int_0^w g(x,z)dz\leqslant aw^2+b|w|^r+c \tag{5·8}$$

其中 $a\|K\|_{L^2(\Omega)}<\frac{1}{2}$, $r\in(0,2)$, $b,c$ 是任意实数;

(iii) $L=K|_{L(\Omega)}$ 紧或 $-G$ 单调($(Gu)(x)=g(x,u(x))$),则(5·6)在 $L^q(\Omega)$ 内有解.

**证明** 首先注意到 $L^p(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset L^q(\Omega)$ 且 $L^p(\Omega)^*=L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)^*=L^q(\Omega)$. 由(5·7)式, Caratheodory 映射 $G:L^p(\Omega)\to L^q(\Omega)$. 由本章定理1·6,它的势泛函是

$$\varphi(u)=\int_\Omega dx\int_0^{u(x)} g(x,z)dz \quad (u\in L^p(\Omega))$$

由于 $K:L^q(\Omega)\to L^p(\Omega)$,故存在 $B:L^p(\Omega)\to L^2(\Omega)$, $A:L^2(\Omega)\to L^q(\Omega)$,使得 $K=AB$. 于是,由(5·7)、(5·8)两式得

$$\psi(u)=\frac{1}{2}(u,u)-\varphi(Au)$$

$$=\frac{1}{2}(u,u)-\int_\Omega dx\int_0^{(Au)(x)} g(x,z)dz$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(u,u)-a\int_\Omega((Au)(x))^2dx-b\int_\Omega|(Au)(x)|^r dx$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{2}-a\|L\|\right)\|u\|^2-b\|u\|^r-c$$

这是由于 $L=K|_{L^2}$, $A=L^{\frac{1}{2}}$, $\int_\Omega|Au(x)|^2dx=\|Au\|^2\leqslant\|A\|^2\|u\|^2\leqslant\|L\|\|u\|^2$ 的缘故. 因此泛函 $\psi$ 强制. 若 $L$ 紧,则从定理 5·3 知方程(5·6)在 $L^q(\Omega)$ 内有解,若 $-G$ 单调,则从定理 5·4 得结论.

证毕

满足定理 5·5 的假设(i)的 $K(x,y)$,称为正的对称核. 最后我们指出,当 $\int_\Omega\int_\Omega(K(x,y))^2dxdy<\infty$ 时, $L=K|_{L^2(\Omega)}$ 是紧的;若 $\forall x\in\Omega$, $g(x,\cdot)$ 单调不增,则 $-G$ 单调.

## §6 极小化序列

变分学和最优化的中心问题是求定义在Banach空间的某子集 $\Omega$ 上的泛函 $\varphi$ 的最小值点．本节讨论最小值点的逼近问题．

**定义6·1** 设 $X$ 是拓扑空间,$\Omega\subset X$,$\varphi$ 是 $\Omega$ 上的实泛函．若存在$\{x_n\}\subset\Omega$,使得

$$\varphi(x_n)\longrightarrow\inf_{x\in\Omega}\varphi(x)\quad(n\to\infty)$$

则称$\{x_n\}$是极小化序列.

首先碰到的一个问题是极小化序列$\{x_n\}$的收敛性．当然可以考虑不同意义下的收敛．如果 $\Omega$ 弱列紧，则有子列$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\rightharpoonup w$．若 $\varphi$ 在 $\Omega$ 上还是弱下半连续的,这样,就有

$$\varphi(w)\leqslant\varliminf_{k}\varphi(x_{n_k})=\lim_{n}\varphi(x_n)=\inf_{x\in\Omega}\varphi(x)$$

若再设 $\Omega$ 序列式弱闭,则 $w\in\Omega$．从而,有极小化序列的一个子列弱收敛于 $\varphi$ 的最小值点．为了能够运用变分方法，我们的兴趣在于：泛函的最小值点也是临界点的情形．我们简称这种点为临界最小值点．

**定理6·1** 设 $X$ 为实自反Banach空间,实泛函 $\varphi$ 在 $X$ 上是 $G$-可微,强制和严格凸的，则 $\varphi$ 的任一极小化序列弱收敛于 $\varphi$ 的唯一临界最小值点．

**证明** 按假设，由定理3·5，泛函 $\varphi$ 有无条件局部极小值点 $w$．因为 $\varphi$ 是 $G$-可微的,故 $w$ 是 $\varphi$ 的临界点．实际上,$w$ 是 $\varphi$ 在整个空间 $X$ 上的最小值点．

先证每一极小化序列$\{x_n\}$是有界的．若不然,设$\{x_n\}$无界．于是有$\{x_{n_k}\}$,$\|x_{n_k}\|>k(k\in\mathscr{N})$．由 $\varphi$ 的强制性，存在 $r>\varphi(w)=\inf_{x\in X}\varphi(x)$及 $K\in\mathscr{N}$，使得当 $k>K$ 时,有 $\varphi(x_{n_k})>r$,从而出现矛盾

的结果

$$\inf_{x\in X}\varphi(x)=\lim\varphi(x_{n_k})\geqslant r>\inf_{x\in X}\varphi(x)$$

注意到已经证明了$\{x_n\}$有界和 $X$ 自反的假设，存在 $x_0\in X$ 及$\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}\rightharpoonup x_0(k\to\infty)$. 从而，由于 $w$ 是 $\varphi$ 的最小值点及 $\varphi$ 的弱下半连续性得

$$\varphi(x_0)\geqslant\varphi(w)=\inf_{k\in\mathscr{N}}\varphi(x_{n_k})\geqslant\varphi(x_0)$$

所以，$\varphi(x_0)=\varphi(w)$. 因为 $\varphi$ 是严格凸泛函，故最小值点是唯一的. 由此得 $x_0=w$.

最后，我们来证明不仅 $x_{n_k}\rightharpoonup w$，而且 $x_n\rightharpoonup w(n\to\infty)$. 若不然，不妨设 $x_{m_j}\rightharpoonup v(j\to\infty)$，则

$$\varphi(v)\leqslant\underline{\lim_j}\,\varphi(x_{m_j})=\lim_n\varphi(x_n)=\lim_k\varphi(x_{n_k})=\varphi(w)$$此与最小值点的唯一性相矛盾.

证毕

如果把定理 6·1 中对 $\varphi$ 的严格凸假定，换成 $d\varphi$ 强单调，则可得极小化序列是依范数收敛的.

**定理 6·2** 设 $X$ 为自反 Banach 空间，实泛函 $\varphi$ 在 $X$ 上 $G$-可微且 $d\varphi$ 有界强单调，$d\varphi(\cdot)$ 在 $X$ 上是半连续的. 则 $\varphi$ 的任一极小化序列按范数收敛于 $\varphi$ 的唯一临界最小值点.

**证明** 由假设及定理 3·3 知，$\varphi$ 强制. 注意到定理 6·1 的证明过程中，$\varphi$ 的严格凸性只是用来保证最小值点的唯一性，而 $d\varphi$ 强单调保证了临界点的唯一性. 因此，据定理 6·1，每一极小化序列$\{x_n\}$都弱收敛于 $\varphi$ 的唯一临界最小值点 $w$. 在式

$$\begin{aligned}&\varphi(x_n)-\varphi(w)-(d\varphi(w),x_n-w)\\&=\int_0^1(d\varphi(w+t(x_n-w))-d\varphi(w),x_n-w)dt\geqslant c\|x_n-w\|^2\end{aligned}$$

中，令 $n\to\infty$，即知 $x_n\longrightarrow w$.

证毕

下面我们用著名的 Ritz 方法构造极小化序列. 先假设

(一) 在 $X$ 内有线性无关点列 $\{v_n\}$, 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$, 其中 $E_n = \text{span}\{v_1, \cdots, v_n\}$. 此外, 设实泛函 $\varphi$ 在 $X$ 上 $G$-可微分、强制且在每一 $E_n$ 上是下半连续的.

因 $\varphi$ 强制, 故存在 $r>0$, 使当 $\|x\|>r$ 时, $\varphi(x)>\varphi(\theta)$. 又因 $E_n$ 中的球 $\bar{B}_{E_n}(\theta, r)$ 紧, 而 $\varphi$ 在此球上下半连续, 故存在 $w_n \in \bar{B}_{E_n}(\theta, r)$, 使 $\varphi$ 在此球上于 $w_n$ 取最小值. 因为当 $\|x\| \geqslant r$ 时, $\varphi(x) > \varphi(\theta) \geqslant \varphi(w_n)$, 故 $\varphi$ 于 $w_n$ 取局部极小, 其实, $\varphi(w_n) = \min\limits_{x \ E_n} \varphi(x)$. 因此,

$$\varphi(w_n) = \inf_{x \in E_n} \varphi(x), \quad w_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(n)} v_j \tag{6·1}$$

由于 $\varphi$ 是 $G$-可微的, 故 $d\varphi(w_n) = 0$, 即 $(d\varphi(w_n), h) = 0 \ (h \in E_n)$, 从 (6·1) 得

$$\left( d\varphi\left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(n)} v_j \right), v_k \right) = 0, k = 1, 2, \cdots, n, n \in \mathcal{N} \tag{6·2}$$

显然 $\{w_n\}$ 线性无关.

今证 $\{w_n\}$ 是极小化序列. 为此, 再补充假设

(二) 存在 $r>0$, 使得 $\varphi(x) \geqslant r \ (x \in X)$ 且 $-\varphi$ 在 $X$ 上是下半连续的.

因 $\varphi$ 下方有界, 故 $\inf\limits_{x \ X} \varphi(x) = \alpha$ 存在. 对 $\varphi$ 之任一极小化序列 $\{u_n\} \subset X$, 由于 $-2\varphi(u_n) + \alpha \leqslant -\varphi(u_n)$, 所以 $-2\varphi(u_n) + \alpha - \dfrac{\alpha}{n} < -\varphi(u_n) \ (n \in \mathcal{N})$. 由 $-\varphi$ 下半连续, 对每一 $n \in \mathcal{N}$, 存在 $r_n > 0$, 使当 $u \in \bar{B}_X(u_n, r_n)$ 时, $\alpha \leqslant \varphi(u) < 2\varphi(u_n) - \alpha + \dfrac{\alpha}{n}$. 由关于空间 $X$ 的假设, 对每一 $n \in \mathcal{N}$, 可选 $z_n \in \bar{B}_X(u_n, r_n) \cap E_n$, 从而 $\alpha \leqslant \varphi(z_n) < 2$

$\varphi(u_n)-\alpha+\frac{\alpha}{n}$. 令 $n\to\infty$，注意到 $\{u_n\}$ 是极小化序列，知 $\{z_n\}$ 也为极小化序列. 现在考虑满足条件(6·1)和(6·2)的Ritz 序列 $\{w_n\}$，则有

$$\alpha\leqslant\varphi(w_n)\leqslant\varphi(z_n)$$

令 $n\to\infty$，得 $\varphi(w_n)\to\alpha$，故 $\{w_n\}$ 也是极小化序列.

总之，从以上的讨论及定理 6·1 得

**定理 6·3** 设 $X$ 为实自反 Banach 空间且存在线性无关序列 $\{v_n\}\subset X$，使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=X$，其中 $E_n=\text{span}\{v_1,\cdots,v_n\}$. 此外，设实泛函 $\varphi$ 在 $X$ 上 $G$-可微、强制、严格凸且 $-\varphi$ 下半连续. 则 Ritz 序列

$$w_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j{}^{(n)}v_j \quad n\in\mathcal{N} \tag{6·3}$$

弱收敛于 $\varphi$ 的唯一临界最小值点，其中 $\alpha_j{}^{(n)}$ 满足 Ritz 方程组

$$\left(d\varphi\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j{}^{(n)}v_j\right),\ v_k\right)=0 \quad k=1,2,\cdots,n \tag{6·4}$$

下面讨论几种特殊情况.

(i) 如果用 $d\varphi$ 在 $X$ 上强单调来代替 $\varphi$ 的强制性和严格凸性，则由定理 6·2 可推得 Ritz 序列(6·3) 按范数收敛于唯一临界最小值点.

(ii) 若导映射 $d\varphi(\cdot)$ 是线性的，则 Ritz 方程组(6·4) 具有更简单的形式. 设 $X$ 为可分的 Hilbert 空间，$L$ 是 $X$ 上的有界线性自伴算子且存在 $c>0$，使得 $\langle Lx,x\rangle\geqslant c\|x\|^2$. 对任一给定的 $y\in X$，定义泛函

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\langle Lx,x\rangle-\langle y,x\rangle \quad x\in X$$

取$\{v_n\}$是 $X$ 的就范直交系. 由关于算子 $L$ 的假定，易知 $\varphi$ 是强制的、连续的. 又 $\varphi$ 是 $G$-可微的且 $d\varphi(x)=Lx-y$, $d^2\varphi=L$, 显然 $d\varphi$ 有界. 根据定理 4·5, $d\varphi$ 强单调. 这样，由上述的特殊情况 (i), Ritz 序列$\{w_n\}$依范数收敛于 $\varphi$ 的唯一临界最小值点 $w$, 其中

$$w_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j \quad n\in\mathcal{N}$$

而 Ritz 方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(Lv_j,v_k)=(y,v_k) \quad k=1,\cdots,n$$

是含未知量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性方程组. 这个方程组是唯一可解的，其解组成的 $w_n$ 近似于 $w$.

在结束本章之前，让我们回顾一下用变分方法解决数学物理问题的基本思想. 为求一个微分方程或者积分方程的解，变分方法是把它化成求某 $G$-可微泛函的临界点. 自然要提出，如何求临界点呢? § 3 已经证明了，如果 $x_0$ 是 $\varphi$ 的局部极值点，则 $x_0$ 是 $\varphi$ 的临界点. 但是，临界点未必是极值点. 何况，在具体问题中，判定极值存在的条件，如泛函的弱下半连续性. 强制性等也都是很强的要求. 此外，对不是极值点的临界点，本节所讲的极小化序列方法也就没有意义了. 近十年来，完全有别于上述方法的求临界点的拓扑方法获得蓬勃发展. 特别是 A. Ambrosetti 和 P. H. Rabinowitz 于 1973 年提出的求临界点的山路引理是临界点理论的基本结果. 同时，出于对山路引理的研究，又引出一系列更一般的极小极大定理，这些定理不仅可以用来判定临界点的存在性，而且还能估计临界点的个数. 极小极大定理和山路引理可以处理一些偏微分方程问题. 本节不讲这些内容了，详见参考文献[10].

## 习　　题

1. 设$X$是实线性赋范空间，$f(x)$是$X$上的下半连续泛函．试证对任何实数$c$，水平集

$$f^{\leqslant}(c)=\{x \mid f(x)\leqslant c\}$$

是闭集．

2. 设$X$为实 Banach 空间，$f(x)$ 是$X$上的下半连续凸泛函．试证水平集

$$f^{\leqslant}(c)=\{x \mid f(x)\leqslant c\}$$

是序列式弱闭集．

3. 设$X$为实线性空间，$\Omega$是$X$的凸子集，$f:\Omega\to E^1$是凸泛函．试证对任何$x_1,\cdots,x_n\in\Omega$，$\sum\limits_{i=1}^{n} t_i=1, t_i\geqslant 0$，有

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n} t_i f_i(x_i)$$

4. 设$X$是实线性空间，$f$是$X$上的严格凸泛函，$x_0\in X$．试证对任何固定的$x\neq\theta$，$f(x_0+tx)$对$t$是$[0,\infty)$上的增函数．

5. 设$X$为实 Banach 空间，$f:X\to E^1$是$G$-可微分的凸泛函．试证：$f$有最小值当且仅当$df(u)=0$

*6. 设$X$是实可分赋范空间，$\Omega$是$X$的共轭空间$X^*$中的有界序列式弱$^*$闭集．试证：$\Omega$上的弱$^*$下半连续泛函在$\Omega$上下方有界且达到下确界．

7. 设$X$是实 Banach 空间，$\Omega\subset X$是序列式弱紧集，$f$是$\Omega$上的弱下半连续泛函．试证$f$在$\Omega$上有最小值．

8. 假定 Caratheodory 函数$g(x,u)$对几乎每一$x\in\Omega$是$u$的凸函数，且满足

$$|g(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|$$

试证泛函

$$\psi(u)=\int_{\Omega} g(x,u(x))dx$$

是凸泛函且从$L(\Omega)$到$L(\Omega)$是弱下半连续的．

9. 设$K$是实 Hilbert 空间$H$上的有界自共轭算子，$A=K^{\frac{1}{2}}$．又设$G$是

$H$ 上的势算子，其势泛函 $\varphi$ 弱下半连续，且存在 $r>0$，使得

$$\langle G(Au),Au\rangle<\|u\|^2 \qquad 当\|u\|=r$$

试证方程 $u-(K\circ G)u=\theta$ 在 $H$ 内有解.

10. 设 $X$ 为实自反 Banach 空间，$\Omega\subset X$ 是序列式弱紧集，$G\subset X$ 是开集且 $\Omega\subset G$，$f$ 是 $G$ 上的弱下半连续泛函. 又设 $\{x_n\}\subset X$ 满足 $\rho(x_n,\Omega)\to 0$ $(n\to\infty)$ 及 $f(x_n)\to\inf\limits_{x\in\Omega}f(x)$. 试证 $\{x_n\}$ 的所有弱极限点属于 $\Omega$，并且 $f$ 在 $\Omega$ 上至少有一个极小值点. 如果在 $\Omega$ 内仅有一个极小值点，比如说 $x^*$，则 $x_n\rightharpoonup x^*(n\to\infty)$.

# 第五章 单调映射

在非线性泛函分析中，单调算子理论的研究已有二十多年的历史，特别是自反 Banach 空间中的单调算子理论已发展得相当成熟，成果非常丰富．这些理论在非线性偏微分方程边值问题、非线性积分方程、最优化和控制理论中有很广泛的应用．变分学中出现的很多算子也是单调算子．单调算子理论与变分不等式有紧密的联系．自从 Brezis 于 1968 年引入伪单调映射以来，人们已经研究更广泛的所谓各类单调型映射．近年来，许多文献对单调算子方程数值分析理论也进行了深入的研究．

## §1 单调映射

### 1·1 次微分

从本节开始，我们要讨论多值映射，首先来介绍有关多值映射的一些概念．设 $M$ 为一集合，用 $2^M$ 表示 $M$ 的所有子集构成的集．设 $X,Y$ 是两个集合，用 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^Y$ 表示 $X$ 到 $Y$ 的多值映射(集合值映射)．

记

$$\mathscr{D}(T)=\{x\in X\mid Tx\neq\varnothing\}$$

$$\mathscr{R}(T)=\{y\in Y\mid y\in Tx,\ x\in\mathscr{D}(T)\}$$

$$\mathscr{G}(T)=\{[x,y]\in X\times Y\mid x\in\mathscr{D}(T),\ y\in Tx\}$$

分别称为 $T$ 的有效域，值域和图形．

本章仍用 $E^1$ 表实数域，用 $\bar{E}^1$ 表$(-\infty,+\infty]$，并约定

$$\infty+(-\infty)=0,\ 0\cdot\infty=0\cdot(-\infty)=0$$

泛函 $\varphi: C\subset X\to\bar{E}^1$ 称为正则的 (proper)，是指对一切 $x\in C$，$\varphi(x)>-\infty$，且至少有一点 $x\in C$，使 $\varphi(x)<\infty$，即 $\varphi$ 不恒等于 $+\infty$. 我们用

$$\mathrm{dom}\varphi=\{x\in X\mid\varphi(x)<\infty\}$$

表示 $\varphi$ 的有效域.

设 $S: \mathscr{D}(s)\subset X\to 2^Y$. 若 $\mathscr{G}(T)\subset\mathscr{G}(S)$，则称映射 $S$ 是 $T$ 的扩张. 在容许映射多值时，对任何映射 $T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^Y$ 总有逆映射 $T^{-1}: \mathscr{D}(T^{-1})\subset Y\to 2^X$ 存在，定义如下:

$$T^{-1}y=\{x\in X\mid y\in Tx\}$$

以后把单值映射称为算子. 此时，对任一 $x\in\mathscr{D}(T)$，$Tx$ 是单点集.

在古典分析中我们知道函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处是不可微分的，函数 $f$ 的图形在坐标原点 $(0,0)$ 不光滑. 但此函数在 $x=0$ 处仍有极小. 对不可微函数如何求极值呢？如果利用更弱的微分概念，即所谓次微分，仍能判定它有极值.

设 $X$ 为实线性赋范空间. 现在引进正则泛函的次微分概念. 它在单调算子理论中是极为重要的.

**定义 1·1** 设 $\varphi: X\to\bar{E}^1$ 是正则泛函，$x\in X$. 若存在 $f\in X^*$，使得

$$\varphi(y)-\varphi(x)\geqslant(f, y-x)\quad\forall y\in X \tag{1·1}$$

则称 $\varphi(x)$ 于点 $x$ 是次可微分的. 此时，$f$ 称为 $\varphi(x)$ 在 $x$ 点的次梯度. 点 $x$ 处的所有次梯度的集合用 $\partial\varphi(x)$ 表示，称为 $\varphi(x)$ 在点 $x$ 处的次微分 (subdifferential). 若 $\partial\varphi(x)=\varnothing$，则 $\varphi(x)$ 在 $x$ 点不是次可微的. 不等式(1·1)叫做次梯度不等式.

**定理 1·1** 设 $X$ 为实线性赋范空间，$\varphi$ 为 $X$ 上的凸泛函. 若 $\varphi$ 在 $x$ 点处 $G$-可微，则它在 $x$ 点处次可微，且 $\partial\varphi(x)=\{\varphi'(x)\}$.

**证明** 由 $\varphi$ 的凸性，有

$$\varphi(x+t(y-x))\leqslant\varphi(x)+t[\varphi(y)-\varphi(x)],$$
$$x,y\in X,0\leqslant t\leqslant 1$$

于是

$$\frac{1}{t}[\varphi(x+t(y-x))-\varphi(x)]\leqslant\varphi(y)-\varphi(x)$$

令 $t\to 0$，则由定义得 $\varphi'(x)\in\partial\varphi(x)$.

反之，设 $f\in\partial\varphi$，在不等式(1·1)中取 $y=x+tz$，得

$$\frac{1}{t}[\varphi(x+tz)-\varphi(x)]\geqslant(f,z),\qquad z\in X,\quad t>0$$

因而对所有 $z\in X$，都有 $(\varphi'(x)-f,z)\geqslant 0$，即 $f=\varphi'(x)$.

证毕

关于定理 1·1 的逆，有下列结果：设 $\varphi$ 为 $X$ 上的凸泛函，在 $x$ 处连续，并且 $\partial\varphi(x)$ 只含有一个次梯度，则 $\varphi$ 在 $x$ 处 $G$-可微. 证明见参考文献[11].

次微分的性质：

($p_1$) 对任一 $x\in X$，集合 $\partial\varphi(x)$ 在 $X^*$ 内是凸的和弱* 闭的.

($p_2$) $\mathscr{D}(\partial\varphi)\subset\mathrm{dom}\varphi$.

($p_3$) $\varphi$ 在 $x\in\mathscr{D}(\partial\varphi)$ 处取极小值 $\Longleftrightarrow\theta\in\partial\varphi(x)$.

性质($p_1$)提到的 $\partial\varphi(x)$ 是弱* 闭的，系指集合 $\partial\varphi(x)$ 在 $X^*$ 中关于弱* 拓扑是闭集，至于本章涉及到的弱拓扑，弱* 拓扑等概念见第二章 § 8.

事实上，对固定的 $y\in X$，由次梯度不等式知

$$\partial\varphi(x)=\bigcap_{y\in X}\{f\in X^*\mid(f,y-x)\leqslant\varphi(y)-\varphi(x)\}$$

故 $\partial\varphi(x)$ 是弱* 闭的，另两条性质是显然的.

由次微分的定义，容易看出还有下列性质

($p_4$) $\forall\lambda>0,\partial(\lambda\varphi)=\lambda\partial\varphi$ （正齐性）.

## 1·2 单调映射

除特殊声明外，以下恒设$X$为实 Banach 空间，$X^*$ 为其共轭空间.

**定义 1·2** 映射 $T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为单调映射，是指对任何 $x,y\in\mathscr{D}(T)$ 及 $f\in Tx, g\in Ty$，不等式

$$(f-g, x-y)\geqslant 0$$

恒成立. 若当$(f-g, x-y)=0$时，必有 $x=y$，则称 $T$ 是严格单调的。当$T$为单值映射时，称$T$为单调算子.

若算子 $L: \mathscr{D}(L)\subset X\to X^*$ 是线性的，则 $L$ 单调当且仅当 $L$ 是非负的，即

$$(Lx, x)\geqslant 0 \qquad \forall x\in\mathscr{D}(L)$$

显然，所有单调映射的全体在加法运算下是封闭的.

**例 1** 设 $\varphi: E^1\to E^1$ 且 $\varphi(x)$ 单调不减，则由

$$Tx=[\varphi(x-0), \varphi(x+0)] \qquad x\in\mathscr{D}(\varphi)$$

所定义的映射 $T: E^1\to 2^{E^1}$ 是单调的.

**例 2** 设 $\varphi$: $X\to E^1$ 为次可微分正则泛函. 我们来证明映射 $\partial\varphi: \mathscr{D}(\partial\varphi)\subset X\to 2^{X^*}$ 是单调的. $\forall f\in\partial\varphi(x)$及$g\in\partial\varphi(y)$，有

$$\varphi(y)-\varphi(x)\geqslant(f, y-x), \quad \varphi(x)-\varphi(y)\geqslant(g, x-y)$$

两不等式相加得

$$(f-g, x-y)\geqslant 0 \qquad \forall x, y\in\mathscr{D}(\partial\varphi)$$

**例 3** 设 $H$ 为 Hilbert 空间，$A$: $\mathscr{D}(A)\subset H\to H$ 为非扩展算子:

$$\|Ax-Ay\|\leqslant\|x-y\|, \qquad \forall x, y\in\mathscr{D}(A)$$

则映射 $T=I-A$ 是单调算子，其中 $I$ 为恒同算子.

Hilbert 空间上的单调映射具有如下特征:

**命题 1·1** 设$H$为 Hilbert 空间，则 $T: \mathscr{D}(T)\subset H\to 2^H$ 单调当

且仅当对任何 $x,y\in\mathscr{D}(T),f\in Tx,g\in Ty$ 及 $t>0$ 都有

$$\|(x-y)+t(f-g)\|\geqslant\|x-y\|$$

**证明** 设 $T$ 单调，则从

$$\|(x-y)+t(f-g)\|^2=\|x-y\|^2+2t\langle f-g,x-y\rangle+t^2\|f-g\|^2$$

得

$$\|(x-y)+t(f-g)\|\geqslant\|x-y\|,\forall[x,f],[y,g]\in\mathscr{G}(T),t>0$$

反之，从上列不等式得

$$2\langle f-g,x-y\rangle+t\|f-g\|^2\geqslant 0$$

令 $t\to 0$，即知 $T$ 是单调的。

证毕

### 1·3 局部有界性与半连续性

局部有界性是单调映射的基本性质．为证明此结论需做下面的准备工作．

**定义 1·3** 映射 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为在 $x_0\in\mathscr{D}(T)$ 是局部有界的，是指存在 $x_0$ 的邻域 $U$，使得集合

$$T(U)=\{f\mid[y,f]\in\mathscr{G}(T),y\in U\}$$

在 $X^*$ 内有界．

**引理 1·1** 设 $\{x_n\}\subset X$，$\{f_n\}\subset X^*$，$x_n\to\theta$，$\|f_n\|\to\infty$，则 $\forall\rho>0$，存在 $z\in\bar{B}(\theta,\rho)$（$\bar{B}(\theta,\rho)$ 表示以 $\theta$ 为心，半径为 $\rho$ 的闭球）及 $\{x_n\}$，$\{f_n\}$ 的子列 $\{x_{n_j}\}$，$\{f_{n_j}\}$，满足

$$\lim_{j\to\infty}(f_{n_j},x_{n_j}-z)=-\infty$$

**证明** 若结论非真，则对任一 $z\in\bar{B}(\theta,\rho)$，有常数 $c_z$，使得对一切 $n\in\mathscr{N}$，$(f_n,x_n-z)\geqslant c_z$．对任何 $k\in\mathscr{N}$，集合

$$E_k=\{u\in\bar{B}(\theta,\rho)\mid(f_n,x_n-u)\geqslant -k,n\in\mathscr{N}\}$$

是闭集，并且 $\bar{B}(\theta,\rho)=\bigcup_{k\in\mathscr{N}}E_k$．由于 $\bar{B}(\theta,\rho)$ 本身也是完备距离

空间，按照 Baire 纲定理，存在 $r>0$，$y\in \bar{B}(\theta,\rho)$ 及 $k_0\in\mathcal{N}$，使得 $B(y,r)\subset E_{k_0}$. 记 $c_{-y}=c$，又有

$$(f_n, 2x_n+y-u)\geqslant c-k_0, \quad \forall n\in\mathcal{N}, u\in E_{k_0}$$

作 $F_{k_0}=\{u-y\mid u\in E_{k_0}\}$. 现在取 $n_0$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，$\|x_n\|\leqslant\frac{r}{4}$. 对 $n\geqslant n_0$ 及 $v\in F_{k_0}$，$\|v\|<\frac{r}{2}$，有

$$u=2x_n+y-v\in B(y,r)\subset E_{k_0}$$

$(f_n,v)\geqslant c-k_0$. 因而序列$\{(f_n, v)\}$在 $B\left(\theta,\frac{r}{2}\right)\cap F_{k_0}$ 上有界。由于 $B(y, r)\subset E_{k_0}$，所以 $B\left(\theta,\frac{r}{2}\right)\subset F_{k_0}$.

这样，$\{(f_n,v)\}$ 在 $B\left(\theta,\frac{r}{2}\right)$ 上有界，当然在整个 $B(\theta,r)$ 上也有界，从而，$\{\|f_n\|\}$ 有界，此与假设矛盾.

证毕

**定理 1·2** 若 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$，则 $T$ 在 $(\mathscr{D}(T))^\circ$ 上局部有界.

**证明** 假定在点 $x_0\in(\mathscr{D}(T))^\circ$，$T$ 不是局部有界的. 因为经平移单调性不变，我们可假设 $x_0=\theta$. 于是，存在序列$\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，$x_n\to\theta$，$f_n\in Tx_n$，而 $\|f_n\|\to\infty$. 由引理 1·1，存在$\{x_n\}$，$\{f_n\}$ 的子列 $\{x_{n_j}\}$，$\{f_{n_j}\}$及$z\in\bar{B}(\theta, \rho)\subset\mathscr{D}(T)$，使得 $\lim\limits_{j\to\infty}(f_{n_j}, x_{n_j}-z)=-\infty$. 任取 $g\in Tz$，从 $T$ 的单调性得

$$(f_{n_j}, x_{n_j}-z)\geqslant(g, x_{n_j}-z), \quad \forall j\in\mathcal{N}$$

但$(g, x_{n_j}-z)$下方有界，这是矛盾的.

证毕

从定理 1·2 知，对任一$x\in(\mathscr{D}(T))^\circ$，象集 $Tx$ 是 $X^*$ 中的有界集.

**命题 1·2** 若线性算子 $L$: $\mathscr{D}(L)\subset X\to X^*$ 次连续，则 $L$ 连续.

**证明** 只需证明 $L$ 在 $\theta\in X$ 连续. 若不然，存在 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(L)$，$x_n\to\theta$，及 $\varepsilon_0>0$，使得对一切 $n\in\mathscr{N}$，$\|Lx_n\|\geqslant\varepsilon_0$. 令 $t_n=\|x_n\|^{-\frac{1}{2}}$，$y_n=t_nx_n$. 于是 $y_n\to\theta$. 而

$$\|Ly_n\|=t_n\|Lx_n\|\geqslant\varepsilon_0t_n\to\infty$$

此与 $L$ 的次连续性矛盾.

证毕

我们知道，次连续算子必为半连续的，一般情况下，相反的结论未必正确. 但我们有

**命题 1·3** 设 $X$ 是实自反 Banach 空间，$T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to X^*$ 单调且半连续，则 $T$ 在 $(\mathscr{D}(T))^\circ$ 上次连续.

**证明** 设 $x\in(\mathscr{D}(T))^\circ$，$\{x_n\}\subset(\mathscr{D}(T))^\circ$，$x_n\to x$. 由定理1·2序列 $\{Tx_n\}$ 有界. 由于 $X$ 的自反性，不妨假定 $Tx_n\rightharpoonup f\in X^*$. 在不等式

$$(Tx_n-Ty,x_n-y)\geqslant0\quad\forall y\in\mathscr{D}(T)$$

中取极限，得到

$$(f-Ty,x-y)\geqslant0\qquad\forall y\in\mathscr{D}(T)\tag{1·2}$$

因 $(\mathscr{D}(T))^\circ$ 是开集，所以对任何 $u\in X$，存在 $t_u>0$，使得对所有 $t\in(0,t_u)$，$y_t=x+tu\in(\mathscr{D}(T))^\circ$. 在(1·2)式中用 $y_t$ 代替 $y$，有

$$(f-Ty_t,x-y_t)\geqslant0$$

令 $t\to0$，由于 $T$ 的半连续性，得到

$$(f-Tx,u)\geqslant0\qquad(\forall u\in X)$$

于是 $Tx=f$. 因而 $Tx_n\rightharpoonup Tx$，所以 $T$ 是次连续的.

证毕

**推论** 设 $X$ 为有限维赋范空间，若 $T$: $X\to X^*$ 单调且半连续，则 $T$ 在 $X$ 上连续.

若线性算子 $L: X \to X^*$ 单调，则 $L$ 必为连续的. 实际上，线性算子必为半连续的. 由命题1·3知 $L$ 次连续，再由命题1·2，$L$连续.

第四章定理 4·2 表明，若 $\varphi$ 是 $G$-可微泛函，则 $\varphi$ 是凸泛函等价于 $G$-导映射 $d\varphi$ 单调.

## §2 正规对偶映射

### 2·1 局部一致凸空间

第二章 §3 我们讲过严格赋范空间与一致凸赋范空间的关系。现在我们讨论介于这两种空间之间的一类赋范空间.

**定义 2·1** 设 $X$ 为线性赋范空间. 若 $\forall \varepsilon>0$ 及 $x\in X$，$\|x\|=1$，$\exists \delta=\delta(x, \varepsilon)>0$，满足 $\forall y\in S=\{x\in X \mid \|x\|=1\}$，有 $\|x-y\| \geqslant \varepsilon \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1-\delta$，则称 $X$ 为局部一致凸空间.

由定义和第二章定理 3·1 立即知道一致凸 $\Longrightarrow$ 局部一致凸 $\Longrightarrow$ 严格凸.

我们称

$$\delta(x, \varepsilon)=\frac{1}{2} \inf_{\substack{y\in S \\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon}}(2-\|x-y\|) \quad 0<\varepsilon\leqslant 2$$

为局部一致凸模数. 容易看出:

Banach 空间局部一致凸 $\Longleftrightarrow \forall x\in S, \delta(x, \varepsilon)>0$

**引理2·1** 设 $X$ 为 Banach 空间，则 $X$ 是局部一致凸的充要条件是 $\forall x\in S$ 及 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S$，当 $\|x_n+x\|\to 2$ 时，必有 $\|x_n-x\|\to 0$.

**证明** 必要性. 因 $X$ 局部一致凸，所以有 $\delta(x, \varepsilon)>0$，从而由 $(2-\|x_n+x\|)\to 0$ 得 $\|x_n-x\|\to 0$.

充分性. 设当 $\|x_n+x\|\to 2$ 时，必有 $\|x_n-x\|\to 0$，于是，当 $\|x_n-x\|\geqslant\varepsilon>0$ 时，必存在 $\alpha: 0<\alpha<2$，使得 $\|x_n+x\|<\alpha (n=1, 2,$

$3,\cdots)$. 可见，模数 $\delta(x,\varepsilon)>0$，即 $X$ 是局部一致凸的.

关于局部一致凸赋范空间我们有下面的结果.

**命题 2·1** 设 $X$ 为局部一致凸 Banach 空间，在 $X$ 内，$x_n \rightharpoonup x$ 且 $\|x_n\| \to \|x\|$，则 $x_n \to x$.

**证明** 当 $x=\theta$ 时，显然. 今设 $\|x\|>0$，对足够大的 $n$，可令 $y=\frac{x}{\|x\|}$，$y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}$，显然 $\|y_n\|=\|y\|=1$，且 $y_n \rightharpoonup y$. 由此，$y_n+y \rightharpoonup 2y$，于是

$$2=2\|y\| \leqslant \varliminf_n \|y_n+y\| \leqslant \varlimsup_n \|y_n+y\|$$
$$\leqslant \|y\|+\lim_n \|y_n\|=2$$

所以 $\|y_n+y\| \to 2$，由引理 2·1，$\|y_n-y\| \to 0$，即 $\frac{x_n}{\|x_n\|} \to \frac{x}{\|x\|}$. 因为 $\|x_n\| \to \|x\|$，故 $x_n \to x$.

证毕

关于自反 Banach 空间，有下列深刻的结果.

**定理 2·1** (Asplund. E) 设 $X$ 是自反 Banach 空间，其范数为 $\|\cdot\|$，则存在 $X$ 上的等价范数 $\|\cdot\|$，使得关于此范数，$X$ 是严格凸的，且对共轭范数 $\|\cdot\|^*$，$X^*$ 也是严格凸的.

由于这条定理，对自反 Banach 空间的严格凸假设，常常不是本质的限制. 不但如此，还有更深刻的结果.

**定理 2·2** (Trojanski, S. L.) 设 $X$ 为自反 Banach 空间，则存在 $X$ 上的等价范数和 $X^*$ 上的等价范数，使得关于新范数，它们都是局部一致凸的，并且关于新范数彼此仍为共轭空间.

定理 2·1 的证明见 E. Asplund, Averaged norms J. Math., 5 (1967), 227-233. 定理 2·2 的证明见 S. L. Trojanski, on locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach space Studia Math., 37 (1971), 173-180.

### 2·2　正规对偶映射

在非线性泛函分析中，对偶映射 (dual map) 起着重要的作用，它是 Hilbert 空间恒同映射的推广，尤其是在讨论单调映射的极大性与满射性时，以及定义增生映射(accretive map)时，对偶映射都是必要的工具．我们只讨论正规对偶映射．

**定义2·2**　设 $X$ 为实线性赋范空间，$X^*$ 为其共轭空间．由 $J_x=\{f\in X^*\mid (f,\ x)=\|x\|^2=\|f\|^2\}$ 所定义的映射 $J: X\to 2^{X^*}$ 称为 $X$ 上的正规对偶映射(normalized duality map)．

根据 Hahn-Banach 定理，对每一个 $x\in X$，$Jx$ 是 $X^*$ 的非空子集，因而 $\mathscr{D}(J)=X$．容易验证 $J$ 具有如下简单性质：

(i) $J$ 是奇映射，即 $J(-x)=-Jx$;

(ii) $J$ 具有正齐性，即对任何 $\lambda>0$, $J(\lambda x)=\lambda Jx$;

(iii) $J$ 是有界的．

**命题2·2**　正规对偶映射 $J$ 等于凸泛函 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2$ 的次微分．

**证明**　若 $f\in Jx$，则

$$(f,y-x)\leqslant\|f\|\,\|y\|-\|x\|^2$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)-\|x\|^2=\frac{1}{2}\|y\|^2-\frac{1}{2}\|x\|^2$$

即 $f\in\partial\varphi(x)$．

反之，若 $f\in\partial\varphi(x)$，则取 $z=x+ty$，$t>0$，有

$$2t(f,y)\leqslant\|x+ty\|^2-\|x\|^2$$
$$\leqslant(\|x+ty\|+\|x\|)\|ty\|$$
$$2(f,y)\leqslant(\|x+ty\|+\|x\|)\|y\|$$

令 $t\to0$，得 $(f,y)\leqslant\|x\|\,\|y\|$．因而，

$$\|f\|\leqslant\|x\|,\quad (f,x)\leqslant\|x\|^2$$

再取 $z=(1+t)x$, $t<0$, 类似地得 $\|x\|^2\leqslant(f,x)$. 因此, $f\in Jx$.

证毕

**推论** 对任何 $x\in X$, $Jx$ 是 $X^*$ 中的弱*闭凸子集.

**证明** 由次微分的性质与命题 2·2 便知.

**命题 2·3** 设 $X$ 是实线性赋范空间, $X^*$ 是严格凸的, 则 $J$ 是 $X$ 上的单值映射.

**证明** 设 $f\in Jx$, $g\in Jx$. 我们有

$(f,x)=\|x\|^2=\|f\|^2$, $(g,x)=\|x\|^2=\|g\|^2$. 不妨设 $f\neq\theta$, $g\neq\theta$ (因若 $f=\theta$, 则 $x=\theta$, 从而 $g=\theta$; 反之, 由 $g=\theta$ 也可得 $f=\theta$). 于是

$$\left(\frac{f}{\|f\|},x\right)=\|x\|=\left(\frac{g}{\|g\|},x\right)$$

这表明 $X^*$ 上的线性连续泛函 $F_x(h)=(h,x)$ 在点 $\frac{f}{\|f\|}$ 与 $\frac{g}{\|g\|}$ 处都达到其在 $X^*$ 中的单位球面上的最大值. 由于 $X^*$ 是严格凸的, 故由第二章定理 3·1, 应该有 $\frac{f}{\|f\|}=\frac{g}{\|g\|}$. 但 $\|f\|=\|g\|$, 故 $f=g$. 可见 $Jx$ 是单点集.

证毕

**定理 2·3** 若 $X$ 是自反 Banach 空间, $X^*$ 是严格凸的, 则 $J$: $X\to X^*$ 严格单调、次连续.

**证明** 由命题 2·3, $J$ 单值. $\forall x,y\in X$, $x\neq y$, 有

$$\begin{aligned}(Jx-Jy,x-y)&=(Jx,x)-(Jx,y)-(Jy,x)+(Jy,y)\\&\geqslant\|x\|^2-2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|-\|y\|)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

此外, 若 $(Jx-Jy,\ x-y)=0$, 则由于

$$(Jx-Jy,x-y)\geqslant(\|x\|-\|y\|)^2$$

得 $\|x\|=\|y\|$, 从 $(Jx,x)=\|x\|^2$, 又得 $\left(Jx,\ \frac{x}{\|x\|}\right)=\|Jx\|$. 因 $X$ 是严

格凸的. $Jx$ 在单位球面上最多有一点达最大值，所以

$$\left(Jx, \frac{y}{\|y\|}\right)<\|Jx\|=\|x\|$$

即 $(Jx,y)<\|x\|\|y\|$；完全类似地有

$$(Jy,x)<\|x\|\|y\|$$

从而

$$\begin{aligned}(Jx-Jy,x-y)&=(Jx,x)-(Jx,y)-(Jy,x)+(Jy,y)\\&>\|x\|^2-2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=0\end{aligned}$$

这就发生了矛盾. 因此，$J$ 严格单调.

设 $\{x_n\}\subset X$，$x_n\to x_0$. 因为 $\{Jx_n\}$ 有界，所以 $\{Jx_n\}$ 的任一子列 $\{Jx_{n_j}\}$ 都有弱收敛的子列. 设 $Jx_{n_{j(k)}}\rightharpoonup f\,(k\to\infty)$，于是，有

$$\|x_{n_{j(k)}}\|^2=(Jx_{n_{j(k)}},x_{n_{j(k)}})\to(f,x)=\|x\|^2$$

$$\|f\|\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\|Jx_{n_{j(k)}}\|=\varliminf_{k\to\infty}\|x_{n_{j(k)}}\|=\|x\|$$

因而，$\|f\|=\|x\|$. 因为 $J$ 单值，所以 $f=Jx$. 我们已经证明了：$\{Jx_n\}$ 的任一子列，都有一个该子列的子列弱收敛于同一 $Jx$，所以 $Jx_n\rightharpoonup Jx$.

证毕

**推论** 若 $X$ 为自反 Banach 空间，且 $X^*$ 局部一致凸，则 $J$: $X\to X^*$ 连续.

**证明** 因为 $J$ 单值、次连续，所以若 $x_n\to x$，则 $Jx_n\rightharpoonup Jx$. 但是 $\|Jx_n\|=\|x_n\|\to\|x\|=\|Jx\|$，从 $X^*$ 的局部一致凸性，$Jx_n\to Jx$，即 $J$ 是连续的.

证毕

**命题 2·4** 若实 Banach 空间 $X$ 的共轭空间 $X^*$ 是一致凸的，则正规对偶映射 $J: X\to X^*$ 在有界集上是一致连续的.

**证明** 设 $J$ 在有界集 $\Omega\subset X$ 上不是一致连续的，则存在 $\varepsilon_0>0$，$\{u_n\}\subset\Omega$，$\{v_n\}\subset\Omega$，使得 $\|u_n-v_n\|\to0$，而

$$\|Ju_n - Jv_n\| \geqslant \varepsilon, \quad n=1,2,\cdots \tag{2·1}$$

由于 $J$ 的连续性和(2·1)式，必存在 $\alpha>0$，使得 $\|u_n\|\geqslant\alpha$，$\|v_n\|\geqslant\alpha$ $(n\in\mathscr{N})$，令 $x_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，$y_n=\dfrac{v_n}{\|v_n\|}$，则 $\|x_n\|=\|y_n\|=1\,(n\in\mathscr{N})$. 由此易验证

$$\|x_n-y_n\|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

此外，由

$$\begin{aligned}(x_n, Jx_n+Jy_n) &= \|x_n\|^2+\|y_n\|^2+(x_n-y_n, Jy_n)\\ &\geqslant 2-\|x_n-y_n\|\end{aligned}$$

推得 $\frac{1}{2}\|Jx_n+Jy_n\|\geqslant 1-\frac{1}{2}\|x_n-y_n\|$，注意 $\|Jx_n\|=\|Jy_n\|=1$ 和 $X^*$ 的一致凸性，得

$$Jx_n-Jy_n\to 0 \quad (n\to\infty)$$

另一方面，

$$Ju_n-Jv_n=\|u_n\|(Jx_n-Jy_n)+(\|u_n\|-\|v_n\|)Jy_n$$

由此有

$$\|Ju_n-Jv_n\|\leqslant\|u_n\|\cdot\|Jx_n-Jy_n\|+\|u_n-v_n\|\|Jy_n\|$$

所以

$$Ju_n-Jv_n\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

此与(2·1)式矛盾.

证毕

**命题2·5** 设 $X$ 为自反 Banach 空间，$X$，$X^*$ 皆严格凸，若 $(Jx_n-Jx, x_n-x)\to 0 \quad (n\to\infty)$，则 $x_n\rightharpoonup x\,(n\to\infty)$. 此外，若 $X$ 局部一致凸，则更有 $x_n\to x\,(n\to\infty)$.

**证明** 经计算，有

$$\begin{aligned}(Jx_n-Jx, x_n-x) &= (\|x_n\|-\|x\|)^2\\ &\quad +[\|x_n\|\|x\|-(Jx_n, x)]\\ &\quad +[\|x_n\|\|x\|-(Jx, x_n)]\to 0\end{aligned}$$

其中右端各项非负. 因而, $\|x_n\|\to\|x\|$, $(Jx,x_n)\to\|x\|^2$. 因$X$自反,所以不妨设 $x_n\rightharpoonup y$, 从而$\|y\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$. 由于, 当 $n\to\infty$ 时,有$(Jx,x_n)\to(Jx,y)=\|x\|^2$, 因而, $\|x\|=\|y\|$, $(Jx,x)=(Jx,y)$. 因为$X$是严格凸的,故 $x=y$, $x_n\rightharpoonup x$. 至于$X$是局部一致凸空间时, 显然有 $x_n\to x$.

证毕

最后,我们给出空间 $L^p(\Omega)$ 和 $l^p(p>1)$ 上正规对偶映射的具体表达式. 因为$L^q(\Omega)$和 $l^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$都是一致凸赋范空间, 所以 $L^p(\Omega)$ 和 $l^p$ 上的正规对偶映射都是单值的. 由命题2·2, $Jx=\partial\left(\frac{1}{2}\|x\|^2\right)$. 由第一章§2例5知, $\frac{1}{2}\|x\|^2$是$G$-可微分的,从而是次可微的. 于是

$$Jx=\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\|x\|^2\right)=\|x\|\operatorname{grad}\|x\| \qquad \text{当 } x\neq\theta$$

由$J$的性质, $J\theta=\theta$. 这样,从第一章的(2·8)式和(2·9)式,分别得

$$Jx=\|x\|^{2-p}|x(\delta)|^{p-2}x(s) \quad x\in L^p(\Omega)$$

和

$$Jx=\|x\|^{2-p}z \qquad x\in l^p(\Omega)$$

其中 $x=(x,x_2,x_3,\cdots)$, $z=(|x_1|^{p-2}x_1, |x_2|^{p-2}x_2, |x_3|^{p-2}x_3, \cdots)\in l^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

## §3 极大单调映射

### 3·1 极大单调映射

极大单调映射是一类十分重要的单调映射. 由于它具有良好的属性,使得它在后面的讨论中起着非常重要的作用,在偏微分方

程和积分方程中有着广泛的应用. 为引入这一概念，我们首先引入乘积空间中单调集合的定义.

**定义 3·1** 设$X$为实 Banach 空间，集合 $M\subset X\times X^*$称为单调子集，是指$\forall[x,f],[y,g]\in M$,有

$$(f-g,\ x-y)\geqslant 0$$

若$M$单调且不为 $X\times X^*$ 中任何单调集合的真子集，则称$M$是 $X\times X^*$中的极大单调集合.

显然,$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 单调当且仅当$T$的图形$\mathscr{G}(T)$是 $X\times X^*$中的单调集合.

**定义 3·2** 映射 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$称为极大单调的，是指$T$的图形 $\mathscr{G}(T)$为 $X\times X^*$中的极大单调集合.

从定义看出，当$X$是自反 Banach 空间时，$T$ 单调当且仅当 $T^{-1}$ 单调,$T$ 极大单调当且仅当 $T^{-1}$ 极大单调.

容易验证单调映射$T$是极大单调的另一特征是：对任一$[x,f]\in X\times X^*$,若

$$(f-g,x-y)\geqslant 0\quad \forall[y,g]\in\mathscr{G}(T)$$

则必有$[x,f]\in\mathscr{G}(T)$. 这一特征常常用来判定单调映射的极大单调性.

**例 1** 函数

$$f(t)=\begin{cases}t, & t\leqslant 0\\ t+1, & t>0\end{cases}$$

定义的映射 $f$: $E^1\to E^1$ 是单调的,但不是极大单调的.

**定义 3·3** 集合 $M\subset X\times X^*$称为次闭的,是指如果$\{[x_n,f_n]\}\subset M$使得 $x_n\to x, f_n\rightharpoonup f$ 或者 $x_n\rightharpoonup x, f_n\to f$, 那么$[x,f]\in M$.

**命题 3·1** 设 $T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$极大单调,则

(i) 对任一$x\in\mathscr{D}(T)$,$Tx$ 是 $X^*$中的弱*闭凸子集;

(ii) $\mathscr{G}(T)\subset X\times X^*$ 是次闭的.

**证明** (i) 设 $f_1, f_2 \in Tx$, 则对任何 $t \in (0,1)$, $[y, g] \in \mathscr{G}(T)$ 及一切 $f = (1-t)f_1 + tf_2$, 有

$$(f-g, x-y) = (1-t)(f_1-g, x-y) + t(f_2-g, x-y) \geqslant 0$$

从而,由 $\mathscr{G}(T)$ 的极大单调性, $f \in Tx$. 即 $Tx$ 是凸子集.

由极大单调映射的特征,有

$$Tx = \bigcap_{[y,g] \in \mathscr{G}(T)} \{f \in X^* \mid (f-g, x-y) \geqslant 0\}$$

故 $Tx$ 是弱*闭凸子集.

(ii) 由极大单调映射的特性便知.

证毕

**定理 3·1** 设 $X$ 为实 Banach 空间, $T$: $X \to X^*$ 半连续、单调,则 $T$ 极大单调.

**证明** 设 $x \in X$, $f \in X^*$ 满足

$$(f-Ty, x-y) \geqslant 0 \quad \forall y \in X \tag{3·1}$$

今证 $f = Tx$. 用反证法. 若 $f \neq Tx$, 则存在 $z \in X$, 使得 $(f-Tx, z) \neq 0$. 不失一般性, 可设 $(f-Tx, z) > 0$. 在(3·1)中取 $y = y_t = x + tz$, $t > 0$, 得 $(f-Ty_t, z) \leqslant 0$. 令 $t \to 0^+$, 由 $T$ 的半连续性. 得 $(f-Tx, z) \leqslant 0$, 此与 $(f-Tx, z) > 0$ 相矛盾.

证毕

我们指出,若 $T: \mathscr{D}(T) \subset X \to 2^{X^*}$ 单调, $\mathscr{R}(T) = X^*$, $T^{-1}$ 单值半连续,则 $T$ 是极大单调的.

**例 1** 不难验证 §1 例 1 的映射 $T: E^1 \to 2^{E^1}$ 是极大单调映射.

**例 2** 设 $X$ 是自反 Banach 空间,假设 $X$ 与 $X^*$ 都是严格凸的,于是 $X$ 上的正规对偶映射 $J$ 是单值、次连续的. 由命题 2·2, 它是凸泛函 $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ 的次微分,从而据 §1 例 2, $J$ 是单调的. 注意到 $\mathscr{D}(J) = X$, 按定理 3·1, $J$ 是极大单调的. §5 将证明凡下

半连续凸泛函的次微分都是极大单调的.

## 3·2 伪单调映射

在单调算子理论的发展过程中，发现一类更广的非线性映射——伪单调映射. 这类映射保持关于单调映射一些基本结果仍成立，更适合应用到非线性椭圆型边值问题及 Hammerstein 型非线性积分方程.

**定义 3·4** 设 $X,Y$ 是拓扑空间，映射 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^Y$，称 $T$ 在 $x\in\mathscr{D}(T)$ 是上半连续的，是指对任一 $Tx\subset Y$ 的邻域 $V$，存在 $x\in X$ 的邻域 $U$，使得

$$T(U)=\{f\in Y \mid f\in Ty,\ y\in\mathscr{D}(T)\cap U\}\subset V$$

**定义 3·5** 设 $X$ 是自反的 Banach 空间，映射 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为伪单调的，是指

($p_1$) 对每一 $x\in\mathscr{D}(T)$，$Tx$ 是 $X^*$ 的闭凸子集；

($p_2$) 若 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，$x_n\rightharpoonup x\in\mathscr{D}(T)$，$f_n\in Tx_n$，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(f_n,x_n-x)\leqslant 0$，则对每一个 $y\in\mathscr{D}(T)$，存在 $f(y)\in Tx$，满足

$$(f(y),x-y)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n,x-y)$$

($p_3$) 对 $X$ 的每一个有限维子空间 $F$，$T$ 从 $\mathscr{D}(T)\cap F$ 到 $2^{X^*}$ 按 $X^*$ 的弱拓扑上半连续

由定义立刻得知，对算子 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to X^*$，当 $T$ 在有限维空间上的限制是次连续的，且满足($p_2$)时，$T$ 是伪单调的.

易验证，全连续算子 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to X^*$ 是伪单调的；若 $X$ 为有限维赋范空间，则连续算子是伪单调的.

**命题 3·2** 设 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 伪单调，则对任一 $x\in(\mathscr{D}(T))^\circ$，$Tx$ 为 $X^*$ 的有界集.

**证明** 设 $x\in(\mathscr{D}(T))^\circ$，任取一列 $\{f_n\}\subset Tx$，则由($p_2$)，对任一

$y\in\mathscr{D}(T)$，存在 $f(y)\in Tx$，使得

$$\varliminf_{n\to\infty}(f_n, x-y)\geqslant(f(y), x-y) \tag{3·2}$$

因 $x\in(\mathscr{D}(T))^\circ$，所以存在 $r>0$，使得 $B(x, r)=\{y\in X\mid\|y-x\|<r\}\subset\mathscr{D}(T)$. 这样，对任一 $u\in B(\theta, r)$，$x+u$ 与 $x-u$ 皆属于 $\mathscr{D}(T)$，由(3·2)式，有

$$\varliminf_{n\to\infty}(f_n, u)\geqslant(f(x-u), u)$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(f_n, u)\leqslant(f(x+u), u)$$

$$\forall u\in B(\theta, r)$$

即对每一 $u\in B(\theta, r)$，数列 $\{|(f_n, u)|\}$ 是有界的. 由一致有界原理，序列 $\{f_n\}$ 在 $X^*$ 内有界. 故 $Tx$ 是 $X^*$ 的有界集.

证毕

给定 $n$ 个映射 $T_i$: $\mathscr{D}(T_i)\subset X\to 2^{X^*}$, $i=1, \cdots, n$. 当 $\bigcap_{i=1}^{n}\mathscr{D}(T_i)\neq\varnothing$ 时，可以定义它们的和 $T$: $X\to 2^{X^*}$ 如下：

$$Tx=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}f_i, & \text{当 } x\in\bigcap_{i=1}^{n}\mathscr{D}(T_i),\ f_i\in T_ix \\ \varnothing, & \text{否则}\end{cases}$$

**命题 3·3** 设 $T_i$: $\mathscr{D}(T_i)\subset X\to 2^{X^*}$, $i=1,2$, 伪单调，则 $T_1+T_2$ 伪单调.

**证明** 首先指出 $T_1+T_2$ 满足 $(p_1)$，$(p_3)$ 是显然的. 为证明 $(p_2)$，记 $\mathscr{D}=\mathscr{D}(T_1+T_2)=\mathscr{D}(T_1)\cap\mathscr{D}(T_2)$，设 $x_n\in\mathscr{D}$, $x_n\to x\in\mathscr{D}$, $h_n\in(T_1+T_2)x_n$，满足

$$\varlimsup_{n\to\infty}(h_n, x_n-x)\leqslant 0$$

因为 $h_n=f_n+g_n$, $f_n\in T_1x_n$, $g_n\in T_2x_n$，我们就有

$$\varlimsup_{n\to\infty}[(f_n, x_n-x)+(g_n, x_n-x)]\leqslant 0$$

从此不等式来证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(f_n,\ x_n-x)\leqslant 0 \quad 及 \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}(g_n, x_n-x)\leqslant 0 \qquad (3\cdot3)$$

实际上，若非如此，则由对称原因，可设$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(g_n, x_n-x)=d>0$，或者说对某个子列，不妨仍用原符号，$\lim\limits_{n\to\infty}(g_n,\ x_n-x)=d>0$. 于是$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(f_n, x_n-x)\leqslant -d<0$. 因为$T_1$是伪单调的，所以，对每一$y\in\mathscr{D}$，存在$f(y)\in T_1x$，使得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, x_n-y)\geqslant(f(y), x-y)$$

特别地取$y=x$，得$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(f_n, x_n-x)\geqslant 0$，此与

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, x_n-x)\leqslant -d<0$$

相矛盾.

依(3·3)式，由$T_1$，$T_2$的伪单调性得出：对任一$y\in\mathscr{D}$，存在$f(y)\in T_1x, g(y)\in T_2x$，使得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, x_n-y)\geqslant(f(y),\ x-y)$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(g_n, x_n-y)\geqslant(g(y), x-y)$$

两不等式相加，得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(h_n, x_n-y)\geqslant(h(y), x-y)$$

其中$h(y)=f(y)+g(y)\in(T_1+T_2)x$，这说明$T_1+T_2$满足($p_2$)故$T_1+T_2$伪单调.

用伪单调映射来研究极大单调映射是非常方便的. 下面设$X$为自反 Banach 空间.

**定理 3·2** 设$T: X\to 2^{X^*}$极大单调，则$T$伪单调.

**证明** 下面我们分别验证$T$满足伪单调的条件.

($p_1$) 由命题 3·1 及$X$的自反性，对每一$x\in X$，$Tx$为$X^*$中的

闭凸子集.

(p₂) 设$\{x_n\}\subset X, x_n\to x, f_n\in Tx_n$满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, x_n-x)\leqslant 0$$

对$f\in Tx$,从$T$的单调性得$(f, x_n-x)\leqslant(f_n, x_n-x)$, 令$n\to\infty$, 得$\lim\limits_{n\to\infty}(f_n, x_n-x)=0$. 取$[z,g]\in\mathscr{G}(T)$,可知$(f_n, x_n-z)=(f_n, x_n-x)+(f_n, x-z)$,从而,有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, x_n-z)=\underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, x-z)$$

因为$(g, x_n-z)\leqslant(f_n, x_n-z)$,所以得

$$(g, x-z)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, x-z) \tag{3·4}$$

对$y\in X, t>0$,令$z_t=(1-t)x+ty, g_t\in T_{z_t}$. 在(3·4)中,以$[z_t, g_t]$代替$[z,g]$,得

$$(g_t, x-y)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, x-y)$$

现在,因为$T$在$x$局部有界,所以,可假定存在$\{t_j\}$, $t_j\to 0$, 满足$z_{t_j}\to x$, $g_{t_j}\to f(y)$. 又因$T$极大单调,$\mathscr{G}(T)$次闭,必有$f(y)\in Tx$且

$$(f(y), x-y)\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, x-y)=\underline{\lim_{n\to\infty}}(f_n, x_n-y)$$

(p₃) 若此性质不成立,则对给定的$Tx$在$X^*$内的弱邻域$V$,存在$\{x_n\}\subset X, x_n\to x, f_n\in Tx_n$, 使得对每一$n\in\mathscr{N}, f_n\bar{\in} V$. 由$T$在$x$的局部有界性, $\{f_n\}$有界. 因而,不妨设$f_n\rightharpoonup f$. 由$T$的极大单调性,$f\in Tx$. 这样, 当$n$足够大后,$f_n\in V$,矛盾.

证毕

**注** 在证明(p₃)的过程中, 实际上已获得极大单调映射($\mathscr{D}(T)=X$)从$X$到$2^{X^*}$的弱拓扑是上半连续的. 特别地,当$T$是极大单调算子时($\mathscr{D}(T)=X$),$T$是次连续的. 联系本章定理3·1, 我们知道,次连续是极大单调算子($\mathscr{D}(T)=X$)的又一特征.

**推论** 设 $T$: $X\to X^*$半连续、单调，则 $T$ 伪单调.

**证明** 依定理 3·1，$T$: $X\to X^*$ 极大单调，故 $T$ 伪单调.

证毕

显然，有限个单调映射之和也是单调的. 两个极大单调映射之和就不一定是极大单调的，至少要求$\mathscr{D}(T_1)\cap\mathscr{D}(T_2)\neq\varnothing$，否则 $T_1+T_2$ 的图形是空集. 在此，我们给出两个单调映射之和为极大单调的一个必要条件.

**定理 3·3** 设 $T_1$: $\mathscr{D}(T_1)\subset X\to 2^{X^*}$单调，$T_2$: $X\to X^*$单调，若 $T=T_1+T_2$ 极大单调，则 $T_1$ 也极大单调.

**证明** 设$[x_0,f_0]\in X\times X^*$满足

$$(f_1-f_0,\ x-x_0)\geqslant 0\quad \forall [x,f_1]\in\mathscr{G}(T_1)$$

现记 $g_0=T_2x_0$, $f_2=T_2x$. 因 $f_1$ 是 $T_1x$ 中任意元素，故 $Tx$ 中的元素形如 $f=f_1+f_2$，因而

$$(f-g_0-f_0,x-x_0)=(f_1-f_0,x-x_0)+(f_2-g_0,x-x_0)\geqslant 0$$

从 $T$ 的极大单调性知，$x_0\in\mathscr{D}(T)$，$f_0+g_0\in Tx_0$，即

$$f_0\in Tx_0-T_2x_0=T_1x_0$$

这就证明了 $T_1$ 的极大单调性.

证毕

**定理 3·4** 设 $T$: $X\to X^*$半连续、单调，$P$: $X\to 2^{X^*}$伪单调，则 $S=T+P$ 伪单调.

**证明** 根据定理 3·2 的推论，$T$ 伪单调. 又依命题 3·3，$S=T+P$ 伪单调.

证毕

## §4 单调型映射的满射性

### 4·1 强制映射的满射性

设 $X$ 为 Banach 空间，映射 $A$: $\mathscr{D}(A)\subset X\to 2^{X^*}$. 对任何 $f\in$

$X^*$，方程 $f\in Ax$ 是否在 $X$ 内存在解，相当于映射 $A$ 是否为满射的(surjective).

**定义 4·1** 映射 $T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为是满射的，是指 $\forall f\in X^*$, $\exists x\in\mathscr{D}(T)$，使得 $f\in Tx$，即 $\mathscr{R}(T)=X^*$.

第四章定义了泛函强制性的概念，为了后面进一步讨论的需要，我们给出表达映射"增长速度"的所谓强制性概念.

**定义 4·2** 映射 $T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为强制的(coercive)，是指存在函数 $c$: $[0,\ \infty)\to E^1$，其中当 $r\to\infty$ 时，$c(r)\to\infty$. 且满足：

$$(f,x)\geqslant c(\|x\|)\|x\| \quad \forall[x,f]\in\mathscr{G}(T)$$

映射 $T$ 称为关于 $h\in X^*$ 是强制的，是指存在 $r>0$，满足：

$$(f-h,x)>0 \qquad \forall f\in Tx,\ x\in\mathscr{D}(T)\text{ 且 }\|x\|>r$$

在此需要指出的是，当 $\mathscr{D}(T)$ 是有界集时，我们认为 $T$ 是强制的.

当 $\mathscr{D}(T)$ 是无界集时，我们看到强制性条件也可表为：

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\frac{(f,x)}{\|x\|}=\infty \qquad ([x,f]\in\mathscr{G}(T))$$

实际上，作函数

$$c(r)=\inf\left\{\frac{(f,x)}{\|x\|}\,\middle|\ \ \|x\|=r,[x,f]\in\mathscr{G}(T)\right\}$$

并约定 $\inf\varnothing=\infty$，则有 $\lim\limits_{r\to\infty}c(r)=\infty$，且

$$(f,x)\geqslant c(\|x\|)\|x\| \quad (\forall[x,f]\in\mathscr{G}(T))$$

另外，我们还有：

强制映射关于任一 $h\in X^*$ 是强制的.

事实上，对任何 $h\in X^*$，由函数 $c(r)$ 的性质，存在 $r>0$，使得当 $\|x\|\geqslant r$, $x\in\mathscr{D}(T)$ 时，有

$$(f-h,x)=(f,x)-(h,x)$$
$$\geqslant(c(\|x\|)-\|h\|)\|x\|>0, \forall f\in Tx$$

为了得到 Banach 空间映射满射性的结果，我们从建立 Debrunner-Flor 不等式入手. 为此，先指出如下事实：

若 $P: \mathscr{D}(P)\subset X\to X^*$ 连续，$K\subset\mathscr{D}(P)$，则对任一固定的 $x\in X$，泛函

$$\varphi_x(y)=(Py,x-y):\ k\to E^1$$

是连续的.

实际上，设 $y\in k$，$\{y_n\}\subset k$，$y_n\to y$，则

$$|\varphi_x(y_n)-\varphi_x(y)|=|(Py_n-Py,x-y_n)+(Py,y-y_n)|$$
$$\leqslant\|Py_n-Py\|\cdot\|x-y_n\|+\|Py\|\|y-y_n\|$$

故 $|\varphi_x(y_n)-\varphi_x(y)|\to0\ (n\to\infty)$，即 $\varphi_x(y)$ 关于 $y$ 连续.

下面的引理实质上是单调集合扩张定理，在单调算子理论中甚为重要.

**引理 4·1**(Debrunner-Flor, 1964) 设 $K$ 为 Banach 空间 $X$ 的紧凸子集，$G$ 为乘积 $K\times X^*$ 中的单调集合. 若 $P: \mathscr{D}(P)=K\to X^*$ 连续，$h\in X^*$，则存在 $u\in K$，满足：

$$(f+Pu-h,x-u)\geqslant0\qquad\forall[x,f]\in G\tag{4·1}$$

**证明** 可设 $h=\theta$，否则可用 $Tx=Px-h$ 代替 $Px$. 倘若(4·1)不成立，则对每一 $u\in K$，存在 $[x_u,f_u]\in G$，使得 $(f_u+Pu,\ x_u-u)<0$.

注意到 $(f_u+Py,x_u-y)=(f_u,x_u-y)+(Py,x_u-y)$ 根据本引理之前指出的事实，泛函 $(f_u+Py,x_u-y)$：$K\to E^1$ 关于 $y$ 是连续的，因此存在 $r_u>0$，使

$$(f_u+Py,x_u-y)<0,\ \forall y\in k \text{ 且} \|y-u\|<r_u$$

令

$$N(x_u,f_u)=\{y\mid y\in k,\ \|y-u\|<r_u\}$$

于是 $N(x_u, f_u)$ 是 $K$ 中(相对)开集且 $K=\bigcup_{u\in K}N(x_u, f_u)$ 由于 $K$ 是紧集，故存在有限个 $u_i\in K(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$K=\bigcup_{i=1}^{n}N(x_{u_i}, f_{u_i})$$

令

$$\alpha_i(y)=\begin{cases}r_{u_i}-\|y-u_i\|, & 若\|y-u_i\|<r_{u_i}\\ 0, & 若\|y-u_i\|\geqslant r_{u_i}\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

显然，对每个 $i$，$\alpha_i: X\to[0, r_{u_i}]$ 连续，并且

(i) 当 $y\in K$ 时，有 $\alpha_i(y)>0$ 当且仅当 $y\in N(x_{u_i}, f_{u_i})$；

(ii) 对任何 $y\in K$，$\exists i$，使 $y\in N(x_{u_i}, f_{u_i})$. 于是，对每个 $y\in K$，均有 $\alpha(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(y)>0$. 由于 $K$ 紧，且 $\alpha(y)$ 在 $K$ 上连续，故 $\alpha(y)$ 在 $K$ 上有最小值，并且 $\min_{y\in K}\alpha(y)>0$. 从而，可命 $\beta_i(y)=\dfrac{\alpha_i(y)}{\alpha(y)}$，$y\in K, i=1,\cdots,n$. 根据以上讨论，便知 $\beta_i(i=1, \cdots, n)$ 具有如下性质：

(i) $\beta_i: K\to[0,1]$ 连续；

(ii) $\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y)=1$；

(iii) $\beta_i(y)>0$ 当且仅当 $y\in N(x_{u_i}, f_{u_i})$.

现在我们再定义二映射：$\forall y\in K$，

$$R(y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y)x_{u_i}$$

$$Q(y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y)f_{u_i}$$

显然 $R: K\to X$ 连续，$Q: K\to X^*$ 连续. 由于 $x_{u_i}\in K$ 且 $K$ 是凸集，故

$R(K)\subset K$，于是由 Schauder 不动点定理知，存在 $y_0\in K$，使 $R(y_0)=y_0$.

另一方面，我们考虑：

$$
\begin{aligned}
A(y) &= (Q(y)+Py, R(y)-y) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i(y)\beta_j(y)(f_{u_i}+Py, x_{u_j}-y) \\
&= A_1(y)+A_2(y), \qquad y\in K
\end{aligned} \tag{4·2}
$$

其中：$A_1(y)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2(y)(f_{u_j}+Py, x_{u_j}-y)$

$$
\begin{aligned}
A_2(y) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \beta_i(y)\beta_j(y)[&(f_{u_i}+Py, x_{u_j}-y) \\
&+(f_{u_j}+Py, x_{u_i}-y)]
\end{aligned}
$$

对 $y\in K$，由 $\beta_i$ 性质，可知至少存在一个 $m$，使 $\beta_m(y)\neq 0$，从而 $y\in N(x_{u_m}, f_{u_m})$，$(f_{u_m}+Py, x_{u_m}-y)<0$. 因此得出：

$$
A_1(y)<0, \quad \forall y\in K \tag{4·3}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
&(f_{u_i}+Py, x_{u_j}-y)+(f_{u_j}+Py, x_{u_i}-y) \\
&=(f_{u_i}+Py, x_{u_i}-y)+(f_{u_j}+Py, x_{u_j}-y)+(f_{u_i}-f_{u_j}, x_{u_j}-x_{u_i})
\end{aligned}
$$

若 $\beta_i(y)\beta_j(y)\neq 0\ (i\neq j)$，必有 $y\in N(x_{u_i}, f_{u_i})\cap N(x_{u_j}, f_{u_j})$，即

$$
(f_{u_i}+Py, x_{u_i}-y)<0, \quad (f_{u_j}+Py, x_{u_j}-y)<0
$$

再从 $G$ 的单调性得

$$
(f_{u_i}-f_{u_j}, x_{u_j}-x_{u_i})\leqslant 0
$$

因而，对任何 $y\in K$，

$$
A_2(y)\leqslant 0 \tag{4·4}
$$

由 (4·2)、(4·3)、(4·4) 知，对任何 $y\in K$，有 $A(y)<0$. 此与 $A(y_0)=(Q(y_0)+Py_0, R(y_0)-y_0)=0$ 相矛盾.

证毕

不等式(4·1)称为 Debrunner-Flor 不等式.

下面我们把引理 4·1 应用到有限维空间的情形，为此引进如下概念.

**定义 4·3** 映射 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$, $K\subset X$, 称 $T|_K$是 $T$ 在 $K$ 上的限制, 其中

$$\mathscr{G}(T|_K)=\{[x,f]\in\mathscr{G}(T)\mid x\in K\cap\mathscr{D}(T)\}$$

**定理 4·1** 设 $F$ 为有限维 Banach 空间, $T:\mathscr{D}(T)\subset F\to 2^{F^*}$单调, $C\subset F$是闭凸子集, $[\theta,\theta]\in\mathscr{G}(T|_C)$. 又设 $P:C\to F^*$连续, 它关于 $h\in F^*$ 是强制的(当 $x\in C$, 且$\|x\|\geqslant R$ 时, $(Px-h,x)>0$), 则存在 $u\in\overline{B}(\theta,R)\cap C$, 满足

$$(f+Pu-h,x-u)\geqslant 0\quad\forall[x,f]\in\mathscr{G}(T|_C)$$

**证明** 象引理 4·1 的证明一样, 可设 $h=\theta$.

设 $K_r$ 是紧凸集 $\overline{B}(\theta,r)\cap C$, 由引理 4·1, 存在 $u_r\in K_r$, 使得

$(f+Pu_r,x-u_r)\geqslant 0\qquad\forall[x,f]\in\mathscr{G}(T|_{K_r})$特别取$[\theta,\theta]\in\mathscr{G}(T|_{K_r})$, 有$(Pu_r,u_r)\leqslant 0$. 从$P$关于 $\theta\in X^*$的强制性得到, 对任何 $r>0$, $\|u_r\|<R$.

令

$$S_r=\{u\in C\mid (f+Pu,x-u)\geqslant 0, \forall[x,f]\in\mathscr{G}(T|_{K_r})\}$$

则对任何 $r\geqslant R$, $S_r\cap K_r$是非空紧集. 这些集合随 $r$ 上升而下降, 且公共交集非空. 实际上, $S_r\cap K_r=S_r\cap K_R(r\geqslant R)$, 而 $r_1>r_2$ 时, $S_{r_1}\subset S_{r_2}$.

设 $u\in\bigcap\limits_{r\geqslant R}(S_r\cap K_r)$, 则 $u\in B(\theta,R)\cap C$, 且满足

$$(f+Pu,x-u)\geqslant 0\quad\forall[x,f]\in\mathscr{G}(T|_C).$$

证毕

在定理 4·1 中, 若 $P$是强制的, 则可把关于$[\theta,\theta]\in\mathscr{G}(T|_C)$的假设减弱为 $\theta\in\mathscr{D}(T)\cap C$.

为了把 Debrunner-Flor 不等式应用到无限维 Banach 空间，我们推广极大单调映射的概念.

**定义 4·4** 设 $C$ 是 Banach 空间 $X$ 的非空子集，集合 $G\subset C\times X^*$ 称为在 $C\times X^*$ 中是极大单调的，是指 $G$ 为单调集且不为 $C\times X^*$ 中任何单调集的真子集；称映射 $T:\mathscr{D}(T)\subset C\to 2^{X^*}$ 为相对于 $C$ 的极大单调映射，是指 $\mathscr{G}(T)$ 在 $C\times X^*$ 中是极大单调的.

由定义可以看出，当 $T:\mathscr{D}(T)\subset C\to 2^{X^*}$ 单调时，$T$ 相对于 $C$ 是极大单调的当且仅当对 $[x,f]\in C\times X^*$，

$$(f-g,x-y)\geqslant 0\quad(\forall[y,g]\in\mathscr{G}(T))\quad\Longrightarrow[x,f]\in\mathscr{G}(T)$$

应用 Zorn 引理，我们有如下结论.

**命题 4·1** 设 $T:\mathscr{D}(T)\subset C\to 2^{X^*}$ 单调，则存在 $T$ 的相对于 $C$ 的极大单调扩张，即存在单调映射 $T_1:\mathscr{D}(T_1)\subset C\to 2^{X^*}$，$\mathscr{G}(T)\subset\mathscr{G}(T_1)$，且 $\mathscr{G}(T_1)$ 在 $C\times X^*$ 中是极大单调的.

**证明** 令

$$F=\{P:\mathscr{D}(P)\subset C\to 2^{X^*}\mid P\text{ 单调且}\mathscr{G}(T)\subset\mathscr{G}(P)\}$$

则 $F\neq\varnothing$. 对 $P_1,P_2\in F$，当 $\mathscr{G}(P_1)\subset\mathscr{G}(P_2)$ 时，规定 $P_1\prec P_2$，这样，$F$ 构成一个半序集.

设 $\tilde{F}$ 是 $F$ 的一个全序子集，记

$$G=\bigcup\{\mathscr{G}(P_\alpha)\mid P_\alpha\in\tilde{F}\}$$

则存在 $P\in F$，使得 $G=\mathscr{G}(P)$，且 $P$ 为 $\tilde{F}$ 的一个上界. 由 Zorn 引理，$F$ 中有极大元. 设 $T_1$ 为 $F$ 的一个极大元，则 $\mathscr{G}(T)\subset\mathscr{G}(T_1)$，且由 $T_1\in F$ 的极大性知，$\mathscr{G}(T_1)$ 在 $C\times X^*$ 中是极大单调的.

证毕

**定理 4·2** 设 $C$ 是自反 Banach 空间 $X$ 中的闭凸集，$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 是单调映射，$[\theta,\theta]\in\mathscr{G}(T|_C)$，$P:C\to X^*$ 有界伪单调且关于 $h\in X^*$ 强制，则存在 $u\in C$，满足

$$(f+Pu-h,x-u)\geqslant 0,\forall[x,f]\in\mathscr{G}(T|_C)$$

**证明** 不失一般性，可设 $h=\theta$. 将 $T|_C$ 扩张成相对于 $C$ 的极大单调映射，仍记作 $T$.

令

$$\Lambda=\{F \mid F \text{ 为 } X \text{ 的有限维子空间}\}$$

则 $\Lambda$ 按空间包含关系成一个半序集，且对任何 $F\in\Lambda$，当 $x\in F$ 时，$\|x\|_F=\|x\|_X=\|x\|$. 引入嵌入映射 $j_F: F\to X$（即 $j_F x=x, \forall x\in F$）及其共轭映射 $j_F^*: X^*\to F^*$，又记映射

$$T_F=j_F^*\circ T|_F:\ F\cap C\to 2^{F^*}$$

$$P_F=j_F^*\circ P|_F:\ F\cap C\to F^*$$

则有

$$(P_F x, y)=(Px, y),\quad \forall x\in F\cap C, y\in F$$

$$(f_F, y)=(f, y),\quad \forall y\in F, [x, f]\in\mathscr{G}(T|_F), f_F=j_F^* f$$

所以 $T_F$: $F\cap C\to 2^{F^*}$ 单调，$P_F$: $F\cap C\to F^*$ 伪单调，从而连续.

由于 $P$ 关于 $\theta\in X^*$ 的强制性，必存在 $r>0$，使得

$(P_F x, x)=(Px, x)>0, \forall x\in F\cap C\cap(X\backslash\bar{B}(\theta, r))$ 因而 $\{P_F \mid F\in\Lambda\}$ 关于 $\theta\in X^*$ 是一致强制的（即对任何 $M>0$，存在与 $\Lambda$ 中的 $F$ 无关的 $r>0$，使得当 $\|x\|>r$ 时，有 $(P_F x, x)\geqslant M\|x\|$ $(F\in\Lambda)$）. 再据定理 4·1，对每一个 $F\in\Lambda$，存在 $u_F\in\bar{B}(\theta, r)\cap F\cap C$，使得

$$(f_F+P_F u_F, x-u_F)\geqslant 0\quad \forall[x, f_F]\in\mathscr{G}(T_F)$$

由 $T_F$ 与 $P_F$ 的定义得

$$(f+Pu_F, x-u_F)\geqslant 0, \forall[x, f]\in\mathscr{G}(T|_F) \tag{4·5}$$

因为 $P$ 是有界算子，所以存在 $R>0$，使得

$$\|Pu_F\|\leqslant R\quad \forall F\in\Lambda$$

对任一 $F_0\in\Lambda$，作集合

$$V_{F_0}=\bigcup_{\substack{F_0\subset F\\ F\in\Lambda}}\{[u_F, Pu_F]\}$$

显然，$V_{F_0}\subset(\bar{B}(\theta, r)\cap C)\times B^*(\theta, R)$，其中 $B^*(\theta, R)=\{f\in$

$X^* \mid \|f\| \leqslant R\}$. 因$X$是自反 Banach 空间，故$(\bar{B}(\theta, r) \cap C) \times B^*(\theta, R)$是 $X \times X^*$ 中的弱紧集(见第二章§8). 现在我们来证明$\{V_{F_0} \mid F_0 \in \Lambda\}$具有有限交性质. 实际上，当 $F_1, F_2 \in \Lambda$ 且$F_1 \subset F_2$ 时，有$V_{F_2} \subset V_{F_1}$. 于是，对于任意有限个 $F_i \in \Lambda (i=1, 2, \cdots, n)$，诸$F_i$ 的直和 $F = F_1 \dotplus F_2 \dotplus \cdots \dotplus F_n$ 也属于 $\Lambda$，且 $F_i \subset F$. 从而$\bigcap_{i=1}^{n} V_{F_i} \supset V_F \neq \varnothing$.

取 $V_{F_0}$ 的弱闭包$\bar{V}_{F_0}$，显然$\{\bar{V}_{F_0} \mid F_0 \in \Lambda\}$也具有有限交性质. 因为$C$，$\bar{B}(\theta, r)$和 $B^*(\theta, R)$ 都是各自所在空间的弱闭集，所以，$(\bar{B}(\theta, r) \cap C) \times B^*(\theta, R)$也是 $X \times X^*$中的弱闭集，因此，$\bar{V}_{F_0} \subset (\bar{B}(\theta, r) \cap C) \times B^*(\theta, R)$，可见$\bigcap_{F_0 \in \Lambda} \bar{V}_{F_0} \neq \varnothing$.

取定$[u, g] \in \bigcap_{F_0 \in \Lambda} \bar{V}_{F_0}$，我们断言存在$[x_0, f_0] \in \mathscr{G}(T)$，使得：

$$(g, x_0) + (f_0, x_0 - u) \leqslant (g, u) \tag{4·6}$$

若非如此，则对任何$[x, f] \in \mathscr{G}(T)$，有$(f+g, x-u) > 0$. 注意到$[u, -g] \in C \times X^*$，由$T$相对于$C$的极大单调性，有$[u, -g] \in \mathscr{G}(T)$. 特别令 $x = u, f = -g$，得到矛盾结果：

$$0 = (g - g, u - u) > 0$$

任取$[x, f] \in \mathscr{G}(T)$，则存在 $F_0 \in \Lambda$，使得$\{x_0, x\} \subset F_0$. 由于$[u, g] \in \bar{V}_{F_0}$，所以存在$\{[u_n, Pu_n]\} \subset V_{F_0}$，满足$[u_n, Pu_n] \to [u, g]$，即 $u_n \to u, Pu_n \to g$. 在(4·5)式中用 $u_n$ 代替 $u_F$，$[x_0, f_0]$代替$[x, f]$，并令$n \to \infty$，得

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (Pu_n, u_n) \leqslant (g, x_0) + (f_0, x_0 - u)$$

从而，由(4·6)便知

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (Pu_n, u_n - u) \leqslant 0$$

再由$P$的伪单调性，有

$$(Pu, u-x) \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(Pu_n, u_n - x) \tag{4·7}$$

于是连同(4·5)即得：

$$(f+Pu, x-u) \geqslant 0$$

注意到$[x, f] \in \mathscr{G}(T)$的任意性，就有

$$(f+Pu, x-u) \geqslant 0, \forall [x, f] \in \mathscr{G}(T)$$

回想起此处的$T$是$T|_C$被扩张成相对于$C$的极大单调映射，所以更有

$$(f+Pu, x-u) \geqslant 0 \quad \forall [x, f] \in \mathscr{G}(T|_C)$$

证毕

作为 Debrunner-Flor 引理的重要推论，是关于求解泛函方程的下列结果.

**定理 4·3** (Browder, F. E., 1968) 设$C$是自反 Banach 空间$X$中的闭凸集，$T: \mathscr{D}(T) \subset X \to 2^{X^*}$极大单调，$[\theta, \theta] \in \mathscr{G}(T)$，$\mathscr{D}(T) \subset C$，$P: C \to X^*$有界伪单调且关于$h \in X^*$强制，则存在$u \in X$，使得$h \in (T+P)u$.

**证明** 据定理 4·2，存在$u \in C$，使得

$$(f+Pu-h, x-u) \geqslant 0, \ \forall [x, f] \in \mathscr{G}(T)$$

由$T$的极大单调性，$[u, h-Pu] \in \mathscr{G}(T)$，即$h \in (T+P)u$.

证毕

在定理 4·3 的假设下，若$P$强制，则$T+P$是满射的，此时可用$\theta \in \mathscr{D}(T)$来代替$[\theta, \theta] \in \mathscr{G}(T)$的假设. 这样又有如下结论.

**推论 1** 设$X$是自反 Banach 空间，$T: \mathscr{D}(T) \subset X \to 2^{X^*}$极大单调，$\theta \in \mathscr{D}(T)$，$P: X \to X^*$有界半连续单调且强制，则$\mathscr{R}(T+P) = X^*$.

**证明** 因$P: X \to X^*$半连续、单调，所以由定理 3·1，$P$极大单

调. 再由定理 3·2 知, $P$是伪单调的. 故根据定理 4·3, 对任一 $h\in X^*$, 存在 $u\in X$, 使得 $h\in(T+P)u$, 即 $\mathscr{R}(T+P)=X^*$.

**推论 2** 设$X$为严格凸自反Banach空间, $T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 极大单调, $\lambda>0$, 则 $\mathscr{R}(T+\lambda J)=X^*$, 其中 $J$ 是正规对偶映射.

**证明** 取定 $x_0\in\mathscr{D}(T)$, 令

$$T_1x=T(x_0+x),\quad x\in\mathscr{D}(T)-x_0$$

$$Px=\lambda J(x_0+x),\quad x\in X$$

则 $T_1$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 极大单调, $\theta\in\mathscr{D}(T_1)$, $P: X\to X^*$有界、次连续、严格单调且强制, 根据推论 1, $\mathscr{R}(T_1+P)=X^*$, 即 $\mathscr{R}(T+\lambda J)=X^*$.

证毕

**推论 3** 设$X$为自反 Banach 空间, $P: C\to X^*$有界伪单调且强制, 其中$C$是$X$的闭凸集, 则 $\mathscr{R}(P)=X^*$.

**证明** 在定理 4·3 中取 $Tx=\{\theta\}\,(x\in C)$, 即可得到上述结论.

证毕

利用推论 2 与正规对偶映射的性质, 我们可以证明下列的单调算子理论的基本结果.

**定理 4·4** (Browder, F. E. 1963) 设$X$是严格凸自反Banach 空间, $T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$极大单调且强制, 则 $\mathscr{R}(T)=X^*$.

**证明** 因平移不改变映射的极大单调性与强制性, 所以只需证明 $\theta\in\mathscr{R}(T)$.

取一列 $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0\,(n\to\infty)$. 由推论 2, 存在$\{u_n\}\subset X$, 使得 $\theta\in(T+\varepsilon_nJ)u_n$, 即存在 $f_n\in Tu_n$, 使得

$$f_n+\varepsilon_nJu_n=\theta$$

这样, 有

$$0=(f_n+\varepsilon_nJu_n,u_n)\geqslant C(\|u_n\|)\|u_n\|+\varepsilon_n\|u_n\|^2$$

所以，$C(\|u_n\|)\leqslant 0(n\in N)$．由 $C(r)$ 的性质知，存在 $r>0$，使得 $\|u_n\|\leqslant r(n\in N)$．再由 $X$ 的自反性，不妨设 $u_n\to u\in X$．
从 $T$ 的单调性，有

$$(g-f_n, y-u_n)\geqslant 0,\quad \forall[y,g]\in\mathscr{G}(T), n\in N$$

注意到 $\|f_n\|=\varepsilon_n\|Ju_n\|=\varepsilon_n\|u_n\|\leqslant\varepsilon_n r\to 0(n\to\infty)$，所以令 $n\to\infty$，就有

$$(g, y-u)\geqslant 0,\quad \forall[y,g]\in\mathscr{G}(T)$$

根据 $T$ 的极大单调性，$[u,\theta]\in\mathscr{G}(T)$，即 $\theta\in\mathscr{R}(T)$．

证毕

**推论**(Minty-Browder)　设 $X$ 为自反 Banach 空间，$T$: $X\to X^*$ 半连续、单调且强制，则 $\mathscr{R}(T)=X^*$.

**证明**　由定理 3·1，$T$ 是极大单调的，故 $\mathscr{R}(T)=X^*$.

证毕

### 4·2　极大性判别法

由于极大单调映射在单调算子理论中占有重要地位，因而判别一个单调映射的极大性成为一个很重要的问题．利用前面的结果，我们来讨论自反 Banach 空间中满射性与极大单调性的关系．

**命题 4·2**　设 $X$ 是严格凸自反 Banach 空间，$T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 单调，$\lambda>0$．如果 $\mathscr{R}(T+\lambda J)=X^*$，则 $(T+\lambda J)^{-1}$: $X^*\to X$ 单值．次连续且极大单调．

**证明**　首先证明 $(T+\lambda J)^{-1}$ 是单值映射．设 $h\in X^*$，$x,y\in(T+\lambda J)^{-1}h$，则 $h\in Tx+\lambda Jx$，$h\in Ty+\lambda Jy$，即存在 $f\in Tx$，$g\in Ty$，使得

$$h=f+\lambda Jx,\quad h=g+\lambda Jy$$

由 $T$ 的单调性，有

$$0=(h-h, x-y)=(f-g, x-y)+\lambda(Jx-Jy, x-y)$$

$$\geqslant\lambda(Jx-Jy,x-y)\geqslant 0$$

从而$(Jx-Jy,x-y)=0$. 注意到 $J$ 的严格单调性，故有

$$x=y$$

其次证明$(T+\lambda J)^{-1}$是次连续的.

设$\{u_n\}\subset X^*$, $u_n\to u\in X^*$, $x_n=(T+\lambda J)^{-1}u_n$, $x=(T+\lambda J)^{-1}u$, 则存在 $v_n\in Tx_n$, $v\in Tx$, 使得

$$u_n=v_n+\lambda Jx_n,\quad u=v+\lambda Jx$$

从而有

$$\begin{aligned}(u_n-u,x_n-x)&=(v_n-v,x_n-x)+\lambda(Jx_n-Jx,x_n-x)\\&\geqslant\lambda(Jx_n-Jx,x_n-x)\end{aligned}\tag{4·8}$$

因$(T+\lambda J)^{-1}$: $X^*\to X$ 单调, $\mathscr{D}((T+\lambda J)^{-1})=\mathscr{R}(T+\lambda J)=X^*$, 所以据定理 1·2, 算子$(T+\lambda J)^{-1}$局部有界. 因而$\{x_n\}$是有界的. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-u,x_n-x)=0$, 由(4·8)式可得

$$(Jx_n-Jx,\ x_n-x)\to 0\quad(n\to\infty)$$

根据命题 2·5, $x_n\to x$, 即$(T+\lambda J)^{-1}$: $X^*\to X$ 次连续.

最后，由定理 3·1, $(T+\lambda J)^{-1}$是极大单调的.

证毕

至此，我们很容易得到下面的结果:

**定理 4·5** 设$X$是严格凸自反 Banach 空间, $T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$单调，则$T$是极大单调映射的充要条件是: 存在$\lambda>0$, 使$\mathscr{R}(T+\lambda J)=X^*$.

**证明** 必要性. 从定理 4·3 的推论 2 可以得到.

充分性. 根据命题 4·2, $(T+\lambda J)^{-1}$: $X^*\to X$ 极大单调, 从而$(T+\lambda J)$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$极大单调. 但注意到$\lambda J$: $X\to X^*$单调, 由定理 3·3 知, $T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$极大单调.

证毕

作为定理 4·5 的推论，下面我们给出两个单调映射之和是极大单调的一个充分条件.

**推论 1** 设$X$为严格凸自反 Banach 空间，$T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$极大单调，$P: X\to X^*$有界、半连续且单调，则$T+P$是极大单调映射.

**证明** 取定$x_0\in\mathscr{D}(T)$，$\lambda>0$，令

$$T_1x=T(x_0+x),\quad 当\ x=y-x_0,\quad y\in\mathscr{D}(T)$$

$$P_1x=P(x_0+x)+\lambda J(x_0+x),\quad x\in X$$

则$T_1: \mathscr{D}(T_1)\subset X\to 2^{X^*}$极大单调，$\theta\in\mathscr{D}(T_1)$，$P_1$: $X\to X^*$有界、半连续、单调且强制，根据定理 4·3 的推论 1，$\mathscr{R}(T_1+P_1)=X^*$，即$\mathscr{R}(T+P+\lambda J)=X^*$，由定理 4·5，$T+P$极大单调.

证毕

结合推论 1 与定理 4·4，我们得到

**推论 2** 设$X$为严格凸自反 Banach 空间，$T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$极大单调，$P: X\to X^*$有界、半连续且单调，$T+P$为强制映射，则$\mathscr{R}(T+P)=X^*$.

最后，我们给出单调映射的极大单调扩张的一个存在条件. 我们知道，任何一个单调映射$T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$总可以扩张成极大单调映射. 实质上，这时是将单调集合$\mathscr{G}(T)$扩张成$X\times X^*$中的极大单调集合. 一般来说，这时$T$的定义域也要扩张. 但我们有如下结论：当$C$为自反 Banach 空间$X$的闭凸集，$T: C\subset X\to 2^{X^*}$单调时，存在$T$的极大单调扩张$\tilde{T}$，使得$\mathscr{D}(\tilde{T})\subset C$. 这就是下面的定理.

**定理 4·6** 设$C$为自反 Banach 空间$X$的闭凸子集，$T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$单调，则存在$T|_C$的极大单调扩张$\tilde{T}$，使得$\mathscr{D}(\tilde{T})\subset C$.

**证明** 将$T|_C$扩张成相对于$C$的极大单调映射$\tilde{T}$，则$\mathscr{D}(\tilde{T})$

$\subset C$. 在定理 4·2 中取 $P=\lambda J(\lambda>0)$，则对任一 $h\in X^*$，存在 $u\in C$，使得

$$(f+\lambda Ju-h, x-u)\geqslant 0, \quad \forall [x,f]\in \mathscr{G}(\tilde{T})$$

由 $[u, h-\lambda Ju]\in C\times X^*$ 与 $\tilde{T}$ 相对于 $C$ 的极大单调性，$[u, h-\lambda Ju]\in \mathscr{G}(\tilde{T})$，即 $h\in(\tilde{T}+\lambda J)u$. 故有 $\mathscr{R}(\tilde{T}+\lambda J)=X^*$. 根据定理 4·5，$\tilde{T}$: $\mathscr{D}(\tilde{T})\subset X\to 2^{X^*}$ 极大单调.

证毕

**注** 应用定理 4·2 时要求 $\theta\in\mathscr{D}(\tilde{T})$，但由于取定 $x_0\in\mathscr{D}(\tilde{T})$，令 $Px=\lambda J(x_0+x)$，则 $P$ 是强制的且满足定理 4·2 的其它条件，因而这定理仍适用.

### 4·3 非强制映射的满射性

设 $X$ 为自反 Banach 空间，$T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 为单调映射. 由 § 1 定理 1·2 知，$T$ 在 $(\mathscr{D}(T))^\circ$ 上是局部有界的. 根据 $T^{-1}$ 的局部有界性，我们将对极大单调映射建立一个更一般的结论.

$T^{-1}$ 的局部有界性意指：$\forall f\in X^*$，$\exists r>0$，使得集 $\{x\in X \mid B(f,r)\cap Tx\neq\varnothing\}$ 为有界集. 在 Banach 空间中，$T^{-1}$ 为局部有界的充分必要条件是：对任意点列 $\{x_n\}\subset X$，$\{[x_n, f_n]\}\subset\mathscr{G}(T)$，若 $f_n\to f$，则 $\{x_n\}$ 保持有界.

我们指出，对任何强制映射 $T$，$T^{-1}$ 是局部有界的. 事实上，由

$$(f_n, x_n)\geqslant C(\|x_n\|)\|x_n\|$$

和 $f_n\to f$，便得 $C(\|x_n\|)<\infty$，故由 $C(r)$ 的性质知，$\{x_n\}$ 有界.

现在，我们来证明：局部有界性是极大单调性满射的特征性质.

**定理 4·7**(Browder, F. E. 1968) 设 $X$ 为自反 Banach 空间，$T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 极大单调，则 $T$ 为满射的充分必要条件是 $T^{-1}$

在 $X^*$ 上局部有界.

**证明** 必要性. 因为 $T$ 是极大单调的，所以 $T^{-1}$ 也是极大单调的，因 $\mathscr{R}(T)=X^*$，则从 §1 定理 1·2 知，$T^{-1}$ 在 $X^*$ 上局部有界.

充分性. 我们分两步来证明 $\mathscr{R}(T)$ 是 $X^*$ 中既开又闭的子集，但 $\mathscr{R}(T)\neq\varnothing$，于是就有 $\mathscr{R}(T)=X^*$.

首先证 $\mathscr{R}(T)$ 是闭的：设 $\{[x_n,f_n]\}\subset\mathscr{G}(T)$，$f_n\to f$. 因为 $T^{-1}$ 局部有界，所以 $\{x_n\}$ 为有界点列. 由 $X$ 的自反性，可以假定 $x_n\rightharpoonup x\in X$. 因此，由 $\mathscr{G}(T)$ 是次闭的可知，$[x,f]\in\mathscr{G}(T)$. 即有 $f\in\mathscr{R}(T)$.

再证 $\mathscr{R}(T)$ 是开的：任取 $[x,f]\in\mathscr{G}(T)$. 由 $T^{-1}$ 的局部有界性，存在 $r>0$，使 $T^{-1}(B(f,r)\cap\mathscr{R}(T))$ 有界. 对于 $g\in B(f,\frac{r}{2})$，我们来证明 $g\in\mathscr{R}(T)$. 由定理 4·3 的推论 1，$\forall\lambda>0$，存在方程

$$g\in(P+T)u$$

的解 $x_\lambda\in\mathscr{D}(T)$，其中 $Pu=\lambda J(u-x)$，即存在 $g_\lambda\in Tx_\lambda$，使

$$\lambda J(x_\lambda-x)+g_\lambda=g$$

再由 $T$ 的单调性，有

$$(g-\lambda J(x_\lambda-x)-f,x_\lambda-x)\geqslant 0$$

由此推出 $\lambda\|x_\lambda-x\|\leqslant\|g-f\|<\frac{r}{2}$，即有

$$\|g-g_\lambda\|=\lambda\|x_\lambda-x\|<\frac{r}{2}$$

从而 $\|g_\lambda-f\|<r$. 因为 $T^{-1}(B(f,r)\cap\mathscr{R}(T))$ 有界，所以 $\{x_\lambda\}$ 保持有界，且当 $\lambda\to 0$ 时，

$$\|g-g_\lambda\|=\lambda\|x_\lambda-x\|\to 0$$

由于 $\mathscr{R}(T)$ 是闭的，故 $g\in\mathscr{R}(T)$.

证毕

由上述定理，特别地，若$T$极大单调，且$\mathscr{D}(T)$为有界集，则$T$必为满射.

## §5 凸泛函次微分的进一步性质

### 5·1 凸分析

自从 Jensen 于1906年引入凸函数概念以来，凸分析获得蓬勃发展，并且它已经成为研究非线性分析，数学规划和极小极大问题不可缺少的工具. 本节先给出对研究凸泛函很有用的凸函数的一些性质.

**定理 5·1** 设$\varphi$是$[a,b]$上的凸函数，则有

(i) $\varphi$在$[a,b]$上连续；

(ii) 在任何$t\in(a,b)$处$\varphi$的左、右导数皆存在且有$\varphi'_-(t)\leqslant\varphi'_+(t)$；

(iii) 若$\varphi$值在$t_0$取局部极小，则$\varphi$在$t_0$取最小值、即$\varphi(t)\geqslant\varphi(t_0)\ (a\leqslant t\leqslant b)$；

(iv) 若$[a,b]=[0,1]$且$\varphi'_+(0)$存在，则

$$\varphi'_+(0)\leqslant\varphi(1)-\varphi(0)$$

**证明** (ii) 设$a\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant b$，从

$$t_2=\frac{t_3-t_2}{t_3-t_1}t_1+\frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}t_3$$

及$\varphi$的凸性得

$$(t_3-t_1)\varphi(t_2)\leqslant(t_3-t_2)\varphi(t_1)+(t_2-t_1)\varphi(t_3) \qquad (5\cdot1)$$

对$t>\tau$，记

$$\Delta(\tau,\ t)=\frac{\varphi(t_1)-\varphi(\tau)}{t-\tau}$$

由(5·1)式得

$$\Delta(t_1,t_2)\leqslant\Delta(t_1,t_3)\leqslant\Delta(t_2,t_3) \qquad (5\cdot2)$$

由(5·2)知，当 $h\to 0^+$ 时，$\Delta(t,t+h)$ 随 $h$ 单调减少，$\Delta(t-h,t)$ 随 $h$ 单调增加，并且

$$\Delta(t-h,t)\leqslant\Delta(t,t+h),\ h>0,\ t\in(a,b) \tag{5·3}$$

在(5·3)式中令 $h\to 0^+$，知左、右导数都存在且 $\varphi'_-(t)\leqslant\varphi'_+(t)$.

(i) 从(ii)的结论直接推出 $\varphi$ 的连续性.

(iii) 设 $t_0\in[a,b]$，有 $t_0$ 的邻域 $U(t_0)$，使得

$$\varphi(t)\geqslant\varphi(t_0)\qquad t\in U(t_0)\cap[a,b]$$

$\forall t_1\in[a,\ b]$，存在 $\lambda\in(0,\ 1)$，满足 $t_\lambda=t_0+\lambda(t_1-t_0)\in U(t_0)\cap[a,b]$，由此，根据 $\varphi$ 的凸性，有

$$\varphi(t_0)\leqslant\varphi(t_\lambda)\leqslant\lambda\varphi(t_1)+(1-\lambda)\varphi(t_0)$$

因此

$$\varphi(t_1)\geqslant\varphi(t_0)\quad t_1\in[a,b]$$

(iv) 在(5·1)式中令 $t_1=0,t_2=t,t_3=1$，得

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\leqslant\varphi(1)-\varphi(0)$$

因为 $\varphi'_+(0)$ 存在，故 $\varphi'_+(0)\leqslant\varphi(1)-\varphi(0)$.

证毕

现在我们讨论抽象空间上的凸泛函理论. 设 $X$ 为实线性空间，称有限集 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\subset X$ 是仿射无关的，是指集合 $\{x_1-x_0,x_2-x_0,\cdots,x_n-x_0\}$ 线性无关. 又称凸包 $\mathrm{co}\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 是以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为顶点的单纯形.

对于定义在 $X$ 上取值于 $\overline{E}^1$ 的泛函 $\varphi$，集

$$\mathrm{eg}\varphi=\{[x,r]\in X\times E^1\,|\,\varphi(x)\leqslant r\}$$

称为 $\varphi$ 的上方图(epigraph). 设 $C<X$. $C\neq\varnothing$，给定 $C$ 上的正则泛函 $\varphi$，我们总可以把 $\varphi$ 扩张成整个空间 $X$ 上的正则泛函，只需令 $\varphi(x)=\infty\,(x\in X\setminus C)$.

**命题5·1** 设 $X$ 为实线性空间，则泛函 $\varphi$: $X\to\overline{E}^1$ 是凸的充要

条件为 eg$\varphi$ 是 $X\times E^1$ 中的凸子集.

**证明** 必要性. 设 $\varphi$ 是凸的, $[x,r_1],[y,r_2]\in \mathrm{eg}\varphi$, 于是, 对所有 $\alpha,\beta\geqslant 0,\alpha+\beta=1$, 有

$$\varphi(\alpha x+\beta y)\leqslant\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)\leqslant\alpha r_1+\beta r_2$$

由此, $[\alpha x+\beta y,\alpha r_1+\beta r_2]\in \mathrm{eg}\varphi$

充分性. 假定 eg$\varphi$ 是凸的, 则 dom$\varphi$ 作为 eg$\varphi$ 在 $X$ 上的投影也是凸集, 对任何 $x$, $y\in \mathrm{dom}\varphi$, $[x,\varphi(x)],[y,\varphi(y)]\in \mathrm{eg}\varphi$. 所以对所有 $t\in[0,1]$,

$$[(1-t)x+ty,\ (1-t)\varphi(x)+t\varphi(y)]\in \mathrm{eg}\varphi$$

这说明 $\varphi$ 是凸的.

证毕

由命题 5·1 可知, $X$ 上的所有正则凸泛函构成的集, 对应于 $X\times E^1$ 上的一类凸子集, 即所有上方图为凸集合. 反之, 对 $X$ 的任一凸子集 $C$, 也有一个正则凸泛函

$$I_C(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\in C \text{ 时}\\ \infty & \text{当 } x\overline{\in} C \text{ 时}\end{cases}$$

与之对应, 该泛函称为 $C$ 的指示函数(indicator function).

下设 $X$ 为实线性赋范空间.

**引理 5·1** 设 $O(x_0)$ 是点 $x_0\in X$ 的某个邻域, $\varphi: X\to E^1$ 是凸泛函, 且存在常数 $c>0$, 使得当 $x\in O(x_0)$ 时, $\varphi(x)\leqslant c$; 则 $\varphi$ 在 $x_0$ 点连续.

**证明** 不失一般性, 可设 $x_0=\theta$(否则, 令 $y=x-x_0$, $\psi(y)=\varphi(x_0+y)-\varphi(x_0)$). 由假设, 在原点的邻域 $O$ 内, $\varphi(x)\leqslant c<\infty$, 令 $O_1=O\cap(-O)$: 取 $\varepsilon\in(0,1)$, 考虑邻域 $\varepsilon O_1$, 对任何 $x\in\varepsilon O$, 因 $-\dfrac{x}{\varepsilon}\in O_1$, 故根据 $\varphi$ 的凸性, 有

$$0=\varphi(\theta)=\varphi\left(\frac{1}{1+\varepsilon}x+\left(1-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\varphi(x)+\left(1-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\varphi\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

即 $\varphi(x)\geqslant -\varepsilon\varphi(-x/\varepsilon)\geqslant -\varepsilon c$. 另一方面，由 $x/\varepsilon\in O_1$ 及 $\varphi$ 是凸泛函，得 $\varphi(x)\leqslant(1-\varepsilon)\varphi(\theta)+\varepsilon\varphi(x/\varepsilon)\leqslant\varepsilon c$，因而

$$|\varphi(x)|\leqslant\varepsilon c \quad (x\in\varepsilon O_1)$$

即 $\varphi$ 在原点连续.

证毕

引理 5·1 说明若凸泛函 $\varphi$ 在一点的某邻域内有上界，则 $\varphi$ 在该点连续.

**定理 5·2** 在引理 5·1 的假定下，$\varphi$ 在 $(\mathrm{dom}\varphi)^\circ$ 上连续.

**证明** 只需证明对任何 $x_0\in(\mathrm{dom}\varphi)^\circ$，必存在邻域 $O(x_0)$ 及常数 $M$，使得对一切 $x\in O(x_0)$，$\varphi(x)\leqslant M$. 因为 $(\mathrm{dom}\varphi)^\circ$ 是开集，故存在 $\rho>1$，满足 $\rho x_0\in(\mathrm{dom}\varphi)^\circ$. 按定理假设，存在原点的邻域 $O$ 及常数 $c$，使得当 $z\in O$ 时，$\varphi(z)\leqslant c$. 于是，$\forall x\in x_0+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)O$，可表成

$$x=x_0+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)z=\frac{1}{\rho}(\rho x_0)+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)z \quad z\in O$$

因为 $0<1/\rho<1$，$\mathrm{dom}\varphi$ 是凸集，故 $x\in\mathrm{dom}\varphi$，即 $x_0+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)O\subset\mathrm{dom}\varphi$. 最后，由 $\varphi$ 的凸性得到

$$\varphi(x)\leqslant\frac{1}{\rho}\varphi(\rho x_0)+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\varphi(z)$$

$$\leqslant\frac{1}{\rho}\varphi(\rho x_0)+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)c=M$$

证毕

**推论** 有限维空间 $X$ 上的凸泛函 $\varphi$，必在 $(\mathrm{dom}\varphi)^\circ$ 上连续.

**证明** 假定 $(\mathrm{dom}\varphi)^\circ\neq\varnothing$. 设 $\sigma$ 为由 $n+1$ 个仿射无关的顶点 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 所确定的 $n$ 维单纯形，其中 $a_i\in\mathrm{dom}\varphi(i=0,1,\cdots,$

$n$)，则每一点 $x\in\sigma$，都具有形式：

$$x=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i a_i,\quad 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\quad \sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1$$

由于 $a_i\in\mathrm{dom}\varphi$ 及 $\varphi(x)$ 的凸性，有 $\varphi(x)\leqslant\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\varphi(a_i)<\infty$. 因为泛函 $\varphi(x)$ 在 $\sigma$ 上有上界，所以，从定理 5·2 得出 $\varphi(x)$ 在 $(\mathrm{dom}\varphi)^\circ$ 上连续.

证毕

当 $X$ 是线性拓扑空间时，引理 5·1 和定理 5·2 仍成立，其证明与前面的证明完全类似.

在非线性泛函分析的应用中. 常常把一些数学问题归结为求凸泛函在某一凸集上的极小问题. 从第四章 §3 知道，为保证泛函能达到极小，泛函的弱下半连续性的概念起着重要作用. 不但如此，而且在单调算子理论中，为研究凸泛函的次微分的极大单调性，弱下半连续性也是重要的.

首先，我们把下半连续性的概念推广到拓扑空间. 设 $X$ 为拓扑空间. 正则泛函 $\varphi: X\to\bar{E}^1$ 称为在 $X$ 上是下半连续的，是指

$$\varphi(x_0)\leqslant\varliminf_{x\to x_0}\varphi(x)\quad \forall x_0\in X$$

这里规定

$$\varliminf_{x\to x_0}\varphi(x)=\sup_{O(x_0)\in\{O(x_0)\}}\ \inf_{x\in O(x_0)}\varphi(x)$$

其中 $\{O(x_0)\}$ 是点 $x_0$ 在 $X$ 内所有邻域的集合.

以后把下半连续性简记作 l. s. c..

**命题 5·2** 设 $X$ 为拓扑空间，$\varphi: X\to\bar{E}^1$ 为正则泛函，则下列三种说法等价：

(i) $\varphi$ 在 $X$ 上 l. s. c..

(ii) 对每一个 $r\in E^1$，水平集 $\varphi^{\leqslant}(r)=\{x\in X\mid \varphi(x)\leqslant r\}$ 在 $X$ 内是闭集.

(iii) $\mathrm{eg}\varphi$ 是 $X\times E^1$ 内的闭集.

**证明**

(i)$\Longleftrightarrow$(ii) 设 $r\in E^1$，$x_0\in\varphi^{>}(r)=\{x\in X\mid \varphi(x)>r\}$. 由 (i)，存在 $O(x_0)$，使得 $\inf\limits_{x\in O(x_0)}\varphi(x)>r$，可见 $O(x_0)\subset\varphi^{>}(r)$. 从而 $\varphi^{>}(r)$ 是开集，故 $\varphi^{\leqslant}(r)$ 是闭集.

反之，$\forall\varepsilon>0$，记 $O(x_0,\ \varepsilon)=\{x\in X\mid \varphi(x)>\varphi(x_0)-\varepsilon\}$. 由 (ii)，$O(x_0,\ \varepsilon)\in\{O(x_0)\}$. 因为 $\inf\limits_{x\in O(x_0,\varepsilon)}\varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)-\varepsilon$，故由此得 $\varliminf\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\geqslant\varphi(x_0)-\varepsilon$. 令 $\varepsilon\to 0$，便知(i)成立.

(i)$\Longleftrightarrow$(iii) 倘若把 $\mathrm{eg}\varphi$ 视作 $X\times E^1$ 上的泛函 $\Phi=\Phi(x,\ r)=\varphi(x)-r$ 的水平集，则从(i)$\Longleftrightarrow$(ii)立即得到(i)$\Longleftrightarrow$(iii).

证毕

设 $X$ 为 Banach 空间，相应于 $X$ 的强拓扑与弱拓扑来考虑泛函的下半连续性，我们有

**定理 5·3** 设 $\varphi: X\to\bar{E}^1$ 为凸泛函，则 $\varphi$ l. s. c. 等价于 $\varphi$ 弱 l. s. c.

**证明** 由命题 5·2，只需证明对任何凸集 $C\subset X$，$\bar{C}=C_w$，其中 $\bar{C}$ 与 $C_w$ 分别表示 $C$ 的强闭包与弱闭包. 显然有 $\bar{C}\subset C_w$.

反之，设 $x\in C_w$. 若 $x\overline{\in}\bar{C}$，则由凸集第二分离定理，存在 $f\in X^*$，$f\neq 0$，使得

$$(f,x)>\sup_{y\in\bar{C}}(f,y)$$

因为 $x\in C_w$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x$ 的弱邻域 $U$，使得对一切 $z\in U$，$(f,z)\geqslant(f,x)-\varepsilon$. 特别地，对所有 $y\in U\cap\bar{C}$，有 $(f,y)\geqslant(f,x)-\varepsilon$. 取 $\varepsilon_0$ 满足

$$0<\varepsilon_0<(f,x)-\sup_{y\in\overline{C}}(f,y)$$

及 $y_0\in U\cap\overline{C}$,则得矛盾结果 $\varepsilon_0<(f,x-y)\leqslant\varepsilon_0$;所以必有 $C_w\subset\overline{C}$.

证毕

## 5·2 次微分的进一步性质

在这里我们要进一步讨论凸泛函次微分的一些重要性质，特别地,将要证明一个重要结论:下半连续的正则凸泛函的次微分是极大单调映射.

**定理 5·4** 设$X$为实 Banach 空间，泛函$\varphi$在$\mathrm{dom}\varphi$上次可微分,$U\subset\mathrm{dom}\varphi$是凸开集,则$\varphi$是$U$上的凸泛函且 l. s. c..

**证明** 由假设,$\forall x,y\in U$, $t\in[0,1]$, $z=(1-t)x+ty\in U$,于是,对 $f\in\partial\varphi(z)$,有

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(z)+(f,x-z),\ \varphi(y)\geqslant\varphi(z)+(f,y-z)$$

因此有

$$(1-t)\varphi(x)+t\varphi(y)\geqslant\varphi(z)=\varphi((1-t)x+ty)$$

这说明$\varphi$在$U$上凸. 现在,设 $x_0\in U$, $\{x_n\}\subset U$, $x_n\to x_0$,取$f\in\partial\varphi(x_0)$,则

$$\varphi(x_n)\geqslant\varphi(x_0)+(f,x_n-x_0)$$

因而 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\varphi(x_n)\geqslant\varphi(x_0)$,即$\varphi$在$U$上 l. s. c..

证毕

为证明下面重要结论,需要在乘积空间中利用凸集分离定理,这又需要先引入超平面. 设$X$是实线性赋范空间，用 $z$, $y$ 或 $x$, $r$ 分别表示 $X\times E^1$, $X$, $E^1$ 中的元素. 这样，可以写成如下表示式 $z=[y,r]$. 设$\varphi$是 $X\times E^1$ 上的连续线性泛函，容易得到,$\varphi$的一般表达式应为 $\varphi(z)=g(y)+\lambda r$,其中 $g\in X^*$, $\lambda$ 是一确定的实数. 因此,$X\times E^1$ 中闭超平面具有形式

$$\because H=\{z\in X\times E^1|\varphi(z)=a\}$$
$$=\{[y,r]|(g,y)+\lambda r=a\}\quad a\in E^1$$

**定理 5·5** 设$X$为实线性赋范空间，$\varphi_1,\varphi_2$为$X$上的凸泛函，$\mathrm{dom}\varphi_1\cap\mathrm{dom}\varphi_2\neq\varnothing$ 且存在 $x_0\in\mathrm{dom}\varphi_1\cap\mathrm{dom}\varphi_2$，使得 $\varphi_1$ 或 $\varphi_2$ 在 $x_0$ 连续，则

$$\partial(\varphi_1+\varphi_2)=\partial\varphi_1+\partial\varphi_2$$

**证明** 首先由次梯度不等式，显然有

$$\partial\varphi_1(x)+\partial\varphi_2(x)\subset\partial(\varphi_1+\varphi_2)(x)\qquad\forall x\in X$$

其次，不妨设 $\varphi_1$ 在 $x_0$ 点连续. $\forall f\in\partial(\varphi_1+\varphi_2)(x)$，我们来证明存在 $f_1\in\partial\varphi_1(x)$，$f_2\in\partial\varphi_2(x)$，使得 $f=f_1+f_2$. 由次梯度不等式，$f$ 满足

$$\varphi_1(y)-\varphi_1(x)-(f,y-x)\geqslant\varphi_2(x)-\varphi_2(y),\quad\forall y\in X$$

考虑集

$$A=\{[y,r]\in X\times E^1|\varphi_1(y)-\varphi_1(x)-(f,y-x)\geqslant r\}$$
$$B=\{[y,r]\in X\times E^1|\varphi_2(x)-\varphi_2(y)\leqslant r\}$$

显然 $A,B$ 是凸集，且 $A,B$ 的公共点只能在各自的边界上. 因为 $A$ 是凸泛函

$$\varphi(y)=\varphi_1(y)-\varphi_1(x)-(f,y-x)$$

的上方图，且 $\varphi$ 在 $x_0\in\mathrm{dom}\varphi_1\cap\mathrm{dom}\varphi_2$ 连续. 因此

$$A^\circ=(\mathrm{eg}\varphi)^\circ\neq\varnothing$$

由凸集第一分离定理，存在闭超平面

$$H=\{[y,r]|(g,y)+\lambda r=\alpha\}$$

分离 $A$ 与 $B$，其中 $g\in X^*$，$\lambda$、$\alpha\in E^1$. 注意到 $\lambda\neq0$，否则$H$将分离 $\mathrm{dom}\varphi_1$ 与 $\mathrm{dom}\varphi_2$. 不妨设 $\lambda>0$，于是，有

$$\varphi_2(x)-\varphi_2(y)\leqslant(h,y)+a\leqslant\varphi_1(y)-\varphi_1(x)-(f,y-x),\qquad\forall y\in X$$

其中 $h=-\frac{1}{\lambda}g$, $a=\frac{\alpha}{\lambda}$. 取 $y=x$, 得 $a=-(h,\lambda)$. 故

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(y)-\varphi_1(x)\geqslant(f+h,y-x)\\ \varphi_2(y)-\varphi_2(x)\geqslant(-h,y-x)\end{array}\right.\quad\forall y\in X$$

由此, $f+h\in\partial\varphi_1(x)$, $-h\in\partial\varphi_2(x)$, $f=(f+h)-h$.

证毕

**推论** 设 $\varphi_1$, $\varphi_2$, …, $\varphi_n$ 皆为$X$上的凸泛函且存在 $x_0\in\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{dom}\varphi_i$, 使得 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 在 $x_0$ 连续, 则

$$\partial(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)=\partial\varphi_1+\partial\varphi_2+\cdots+\partial\varphi_n$$

**证明** 依定理 5·5, 用归纳法可得.

证毕

**引理 5·2** 设实 Banach 空间$X$上的正则凸泛函$\varphi$是 l. s. c. 的, 则 $\varphi$ 在$(\mathrm{dom}\varphi)^\circ$上连续.

**证明** 留作习题.

下面给出凸泛函次可微分的充分条件.

**定理 5·6** 设$X$为实 Banach 空间, $\varphi: X\to\bar{E}^1$ 为 l. s. c. 的正则凸泛函且$(\mathrm{dom}\varphi)^\circ\neq\varnothing$, 则 $\varphi$ 在 $\mathrm{dom}\varphi$ 上次可微分.

**证明** 由引理 5·2, $\varphi$ 在$(\mathrm{dom}\varphi)^\circ$上连续, 所以$(\mathrm{eg}\varphi)^\circ\neq\varnothing$. 设 $x_0\in\mathrm{dom}\varphi$. 令 $V=\{x_0\}\times(-\infty,\ \varphi(x_0)]$. 显然$V$是 $X\times E^1$ 中的凸子集. 由命题 5·1, $\mathrm{eg}\varphi$ 也是 $X\times E^1$ 中的凸子集. 因为$\{[x,\lambda]\mid\varphi(x)<\lambda\}=(\mathrm{eg}\varphi)^\circ\neq\varnothing$, 且 $V\cap(\mathrm{eg}\varphi)^\circ=\varnothing$, 所以由凸集第一分离定理, 存在闭超平面分离 $\mathrm{eg}\varphi$ 与 $V$, 即存在 $k\in X^*$及 $m,\alpha\in E^1$, 使得

$$(k,x)+m\lambda\geqslant\alpha\quad 当[x,\lambda]\in\mathrm{eg}\varphi$$

$$(k,x)+m\lambda\leqslant\alpha\quad 当[x,\lambda]\in V$$

不妨设 $m>0$. 记 $h=-\frac{k}{m}$, $r=\frac{\alpha}{m}$, 则有

$$\lambda \geqslant (h,x)+r,\ \text{当}[x,\lambda]\in \text{eg}\varphi \tag{5·4}$$

$$\lambda \leqslant (h,x)+r,\ \text{当}[x,\lambda]\in V \tag{5·5}$$

显然$[x,\varphi(x)]\in \text{eg}\varphi$，于是从(5·4)式得

$$\varphi(x)\geqslant (h,x)+r,\quad \forall x\in X \tag{5·6}$$

因为$[x_0,\varphi(x_0)]\in V$，所以从(5·5)式得

$$\varphi(x_0)\leqslant (h,x_0)+r \tag{5·7}$$

(5·6)式与(5·7)式两端分别相减，有

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant (h,x-x_0)\quad \forall x\in X$$

这说明$\varphi$在$x_0$是次可微分的.

证毕

早在本章§1例2就已证明次微分$\partial\varphi$是单调映射. 现在我们来证明$\partial\varphi$还是极大单调的.

**定理5·7** 设$X$为实Banach空间，$\varphi: X\to \bar{E}^1$是正则凸泛函且下半连续，则$\partial\varphi$极大单调.

**证明** 由假设及定理5·6，$\varphi$在$\text{dom}\varphi$上是次可微分的，即$\partial\varphi$存在. 我们利用定理4·5来证明$\partial\varphi$是极大单调的，即$\forall f\in X$，方程$f\in(J+\partial\varphi)x$有解$x_0\in\mathscr{D}(\partial\varphi)$. 实际上，考虑泛函

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2+\varphi(x)-(f,x)$$

易知$\psi: X\to\bar{E}^1$也是正则凸泛函且下半连续. 因为当$\|x\|\to\infty$时，$\psi(x)\to\infty$，所以由第四章定理3·2之推论，存在$x_0\in X$，使得$\psi(x_0)=\inf\limits_{x\in X}\psi(x)$. 由次微分的性质知，$x_0\in\mathscr{D}(\partial\varphi)$和$\theta\in\partial\psi(x_0)$. 由定理5·5，有

$$\theta\in\partial\psi(x_0)=(J+\partial\varphi)(x_0)-f$$

故$f\in(J+\partial\varphi)x_0$，可见$\partial\varphi$是极大单调的.

证毕

## §6 在 Hammerstein 积分方程上的应用

Dolph、Minty、Brézis、Browder、Amann 和 Gupta 等人相继地把单调算子理论的一些基本结果应用到 Hammerstein 型非线性积分方程的研究中去.

设$\Omega$是$n$维欧氏空间$E^n$的有界 Lebesgue 可测集. 考虑 Hammerstein 型非线性积分方程

$$u(x)+\int_\Omega K(x,y)g(x,u(y))\,dy=0,\quad x\in\Omega \tag{6·1}$$

和核函数$K(x,y)$所确定的线性积分算子

$$(Ku)(x)=\int_\Omega K(x,y)u(y)\,dy$$

**定理 6·1** 设

(i) 线性积分算子 $K: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$是有界对称和正的.

(ii) Caratheodory 函数 $g(x,u)$满足

$$|g(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|,\quad \forall x\in\Omega,\ |u|<\infty$$

其中 $a(x)\in L^2(\Omega)$, $b>0$

(iii) $\left|\dfrac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|\leqslant M$, 几乎对所有 $x\in\Omega$, $|u|<\infty$

(iv) $|ug(x,u)|\leqslant cu^2$, 几乎对所有 $x\in\Omega$, $|u|<\infty$

其中 $0<M\|K\|\leqslant 1$, $0<c\|K\|<1$.

则方程(6·1)在 $L^2(\Omega)$内有解.

**证明** 依条件(ii)及第一章定理 1·1, Caratheodory 映射 $G$: $(Gu)(x)=g(x,u(x))$从 $L^2(\Omega)$到 $L^2(\Omega)$且连续. 因为有界线性算子$K$是正的,故有唯一平方根 $K^{\frac{1}{2}}$. 考虑抽象方程

$$F(v)=v+K^{\frac{1}{2}}G(K^{\frac{1}{2}}v)=\theta \tag{6·2}$$

若 $v$ 是(6·2)的解,则

$$K^{\frac{1}{2}}v+KG(K^{\frac{1}{2}}v)=\theta$$

这表明 $u=K^{\frac{1}{2}}v$ 是方程(6·1)的解.

今证方程(6·2)在 $L^2(\Omega)$ 内有解. 首先注意到由于 $K^{\frac{1}{2}}$ 是连续算子,故 $F=I+K^{\frac{1}{2}}GK^{\frac{1}{2}}$ 连续. 其次来证明算子 $F$ 是单调的,从条件(iii),

$$|g(x,u')-g(x,u'')|<M|u'-u''|,\text{对几乎所有 } x\in\Omega$$

由此,$\forall u_1,u_2\in L^2(\Omega)$ 有

$$\begin{aligned}&\|G(K^{\frac{1}{2}}u_1)-G(K^{\frac{1}{2}}u_2)\|^2\\&=\int_\Omega|g(x,(K^{\frac{1}{2}}u_1)(x))-g(x,(K^{\frac{1}{2}}u_2)(x))|^2dx\\&\leqslant M^2\int_\Omega|(K^{\frac{1}{2}}u_1)(x)-(K^{\frac{1}{2}}u_2)(x)|^2dx\\&=M^2\|K^{\frac{1}{2}}u_1-K^{\frac{1}{2}}u_2\|^2\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&(F(u_1)-F(u_2),u_1-u_2)\\&=(u_1+K^{\frac{1}{2}}G(K^{\frac{1}{2}}u_1)-u_2-K^{\frac{1}{2}}G(K^{\frac{1}{2}}u_2),u_1-u_2)\\&=\|u_1-u_2\|^2+(K^{\frac{1}{2}}u_1-K^{\frac{1}{2}}u_2,G(K^{\frac{1}{2}}u_1)-G(K^{\frac{1}{2}}u_2))\\&\geqslant\|u_1-u_2\|^2-\|K^{\frac{1}{2}}(u_1-u_2)\|\cdot\|G(K^{\frac{1}{2}}u_1)-G(K^{\frac{1}{2}}u_2)\|\\&\geqslant\|u_1-u_2\|^2-M\|K^{\frac{1}{2}}(u_1-u_2)\|^2\\&\geqslant(1-M\|K\|)^2\|u_1-u_2\|^2\end{aligned}$$

最后来证明 $F$ 是强制的. 事实上,由条件(iv),当 $u\in L^2(\Omega)$时,有

$$\begin{aligned}(F(u),u)&=\|u\|^2+(K^{\frac{1}{2}}G(K^{\frac{1}{2}}u),u)\\&=\|u\|^2+(G(K^{\frac{1}{2}}u),K^{\frac{1}{2}}u)\end{aligned}$$

$$= \|u\|^2 + \int_\Omega (K^{\frac{1}{2}}u)(x) g(x, (K^{\frac{1}{2}}u)(x)) dx$$

$$\geqslant \|u\|^2 - c(Ku, u)$$

$$\geqslant (1 - c\|K\|)\|u\|^2$$

由于$(1-c\|K\|)>0$，故$F$是强制的. 根据定理4·4的推论，方程(6·2)有解.

证毕

下面对方程(6.1)的$K(x,y)$和$g(x,y)$都用单调性假设给出解的存在性.

**定理6·2** 设

(i) 线性算子$K: L^q(\Omega)\to L^p(\Omega)$ $(p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$满足

$$(Ku, u) = \int_\Omega\int_\Omega K(x,y)u(x)u(y)\,dx\,dy \geqslant 0 \quad \forall u\in L^q(\Omega)$$

(ii) Caratheodory函数满足

$$|g(x,u)| \leqslant a(x) + b|u|^{p-1} \quad \forall x\in\Omega, |u|<\infty$$

其中，$a(x)\in L^q(\Omega)$，$b>0$.

(iii) $g(x, u') \leqslant g(x, u'') \quad \forall x\in\Omega, u'\leqslant u''$;

(iv) $ug(x,u) \geqslant c|u|^p \quad \forall x\in\Omega, |u|<\infty$

其中$c>0$,

则方程(6·1)在$L^p(\Omega)$内有解. 此外，如果

(i') $(Ku, u)>0 \quad \forall u\in L^q(\Omega), u\neq\theta$

或者

(iii') $g(x,u') < g(x,u'') \quad \forall x\in\Omega, u'<u''$,

则方程(6·1)有唯一解.

**证明** 我们把方程(6·1)写成抽象形式

$$u + KG(u) = \theta \tag{6·3}$$

其中$G$是由函数$g$所确定的Caratheodory映射，方程(6·3)等

价于

$$\theta\in K^{-1}(u)+G(u) \tag{6·4}$$

一般来说，$K^{-1}$是多值的. 由条件(i)，线性算子$K$: $L^q(\Omega)\to L^p(\Omega)$是单调的，而线性算子必是半连续的且$K$的定义域是全空间，所以$K$是极大单调的，从而，$K^{-1}$也极大单调. 条件(ii)保证了$G$: $L^p(\Omega)\to L^q(\Omega)$连续和有界. 由条件(iii)，$\forall u_1,u_2\in L^p(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}&(G(u_1)-G(u_2),u_1-u_2)\\&=\int_\Omega(g(x,u_1(x))-g(x,u_2(x)))\cdot((u_1(x)-u_2(x))dx\geqslant 0,\end{aligned}$$

可见$G$单调. 此外，$\forall u\in L^p(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}(G(u),\ u)&=\int_\Omega g(x,u(x))u(x)dx\\&\geqslant c\int_\Omega|u(x)|^p dx\\&=c\|u\|^p\end{aligned}$$

因为$c>0,p>1$，所以$G$是强制的. 总之，算子$G$是有界、连续、单调且强制，$\mathscr{D}(G)\subset L^p(\Omega)$. $K^{-1}$极大单调，$0\in K^{-1}(0)$. 由定理4·3的推论1，$\mathscr{R}(K^{-1}+G)=X^*$ 当然(6·4)可解.

最后，我们证明解的唯一性. 若不然，设$u_1,u_2\in L^p(\Omega)$都是(6·3)的解，则易得

$$u_1-u_2+KG(u_1)-KG(u_2)=0 \tag{6·5}$$

设满足条件(i′). 从(6·5)得

$$\begin{aligned}&(u_1-u_2,G(u_1)-G(u_2))+(KG(u_1)-KG(u_2),\\&\qquad G(u_1)-G(u_2))=0\end{aligned} \tag{6·6}$$

由条件(i′)，(6·6)式第二项是正的，所以

$$(G(u_1)-G(u_2),u_1-u_2)<0$$

此与$G$是单调的相矛盾. 如果满足(iii′)，则因为$u_1(x)$与$u_2(x)$必然不是几乎处处相等的，所以

$$(G(u_1)-G(u_2),u_1-u_2)$$

$$=\int_\Omega (g(x,u_1(x))-g(x,u_2(x)))\cdot(u_1(x)-u_2(x))dx>0$$

从而(6·6)式第二项是负的，此与$(Ku,u)\geqslant 0$相矛盾. 可见解唯一.

证毕

## §7 在拟线性椭圆型偏微分方程边值问题上的应用

早在六十年代初 Browder、Leray 和 Lions 已成功地将单调算子理论的基本结果应用到拟线性椭圆型偏微分方程边值问题解的存在性研究，构成研究单调算子理论的生长点. 不仅如此，这一理论在非线性抛物型方程边值问题和发展方程上也有广泛应用.

我们首先简要地介绍一下有关 Sobolev 空间的一些概念. 设$\Omega$是$n$维欧氏空间$E^n$中的有界开集，其边界$\partial\Omega$是充分光滑的. 记$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，其中每一$\alpha_i$都是非负整数. 设$C_0^\infty(\Omega)$表$\Omega$上无穷次可微分且具有紧支集包含在$\Omega$内的函数全体，即$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$当且仅当$\varphi$在$\Omega$上无穷次可微，$\operatorname{supp}\varphi$是紧集且$\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega$. 设函数$u$在$\Omega$上具有$|\alpha|$阶连续偏导数$\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$. 由分部积分公式易知

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \varphi(x)\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}dx$$

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{7·1}$$

记$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$，$D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$，$D_i^{\alpha_i}=\dfrac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}$，这样，(7·1)式简化成为

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega\varphi(x)D^\alpha u(x)dx \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{7·2}$$

**定义 7·1** 设 $u\in L^2(\Omega)$. 如果存在 $v\in L^2(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{7·3}$$

成立，则称 $v$ 是 $u$（在 Sobolev 意义下）的 $\alpha$ 阶广义导数，仍记作 $v=D^\alpha u$.

注意(7·3)式左端的 $D^\alpha\varphi(x)$是通常导数. 比较(7·2)和(7·3)两式易知，当 $u$ 具有 $\alpha$ 阶通常导数时，它必有 $\alpha$ 阶广义导数且两者一致. 因此，广义导数是一种弱导数. 由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中处处稠密，所以不难看出，如果广义导数存在，则在几乎处处意义下是唯一的. 还要指出的是 $D^0u=u$.

**定义 7·2** 设 $m$ 为非负整数. 在函数集

$$H^m(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega)\,|\,D^\alpha u\in L^2(\Omega),\text{当 } 0\leqslant|\alpha|\leqslant m\}$$

中规定内积

$$\langle u,v\rangle_m=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega D^\alpha u(x)D^\alpha v(x)dx \quad \forall u,v\in H^m(\Omega)$$

后，其中 $D^\alpha u$ 是广义导数，则称 $H^m(\Omega)$ 是 Sobolev 空间.

容易证明 $H^m(\Omega)$是可分 Hilbert 空间，其范数

$$\|u\|_m=\left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7·4}$$

$H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$. $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^m(\Omega)$内的闭包也是 Hilbert 空间，记作 $H_0^m(\Omega)$. 在 $H_0^m(\Omega)$ 中可用

$$\|u\|_m^*=\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega|D^\alpha u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

作范数，这是因为它与(7·4)表达的范数等价.

本书不讨论一般的 Sobolev 空间理论.

现在设 $\Omega$ 是 $E^n$ 中的有界开区域，并且其边界 $\partial\Omega$ 充分光滑使得 Green 公式成立. 给定 $\Omega$ 上的函数 $f$，考虑边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u+u=f(x) & x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{7·5}$$

$$\begin{cases}-\Delta u+u=f(x)\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial v}\right|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \tag{7·6}$$

若存在$\Omega$内二阶连续可微且在$\overline{\Omega}$上连续的函数$u$适合Dirichlet问题(7·5)，则称$u$是(7·5)的古典解．但是如果函数$f$相当一般，比如$f\in L^2(\Omega)$，那么(7·5)的古典解就不一定存在，因此有必要扩充解的概念．

今设$f\in L^2(\Omega)$，$u$是(7·5)的古典解．于是

$$\int_\Omega(-\Delta u(x)+u(x))\varphi(x)dx=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{7·7}$$

由 Green 第一公式，有

$$\int_\Omega(-\Delta u(x)+u(x))\varphi(x)dx=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int_\Omega D_iuD_i\varphi dx+\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial v}\varphi ds \tag{7·8}$$

因$\varphi$在$\partial\Omega$上恒为零，故上式右端最后一个积分为零．记

$$a(u,\varphi)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int_\Omega D_iuD_i\varphi dx+\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

这样，从(7·7)和(7·8)得

$$a(u,\varphi)=\langle f,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega) \tag{7·9}$$

因为$C_0^\infty(\Omega)$在$H_0^1(\Omega)$内处处稠密，故从上式还有

$$a(u,\varphi)=\langle f,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega) \tag{7·10}$$

**定义 7·3** 设$f\in L^2(\Omega)$．如果存在$u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，使得

(7·10)成立，则称 $u$ 是问题(7·5)的广义解.

从上边的推导显见，如果 $u$ 是问题(7·5)的古典解，(假定 $f\in C(\overline{\Omega})$)，则它必为广义解.

反之，若 $u$ 是问题(7·5)的广义解，则(7·9)成立. 回想起此时 $u(u,\varphi)$ 等于(7·8)之左端，所以有

$$\int_{\Omega}(-\Delta u(x)+u(x))\varphi(x)dx=\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$$

从 $u\in H_0^1(\Omega)$ 知 $u|_{\partial\Omega}=0$. 由此，再注意到定义 7·1，当把(7·5)中的导数理解成广义导数时，$u$ 是问题(7·5)的解.

完全类似地，如果 $u$ 是 Neumann 问题(7·6)的古典解，则它必满足

$$a(u,\varphi)=\langle f,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in H^1(\Omega) \tag{7·11}$$

称(7·11)的解 $u$ 是(7·6)的广义解；反之，如果 $u$ 是(7·6)的广义解，则把(7·6)中的导数理解成广义导数的意义下，$u$是它的解，在此就不详细推导. 请读者自己完成之.

现在我们回到本节要讨论的主要问题，把单调算子理论用到拟线性椭圆型偏微分方程的研究上去. 设对 $E^n$ 中的有界开区域 $\Omega$ 的要求如前. 考虑取广义散度型的 $2m$ 阶非线性偏微分算子

$$Au=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}A_{\alpha}(x,u,\cdots,D^m u), \tag{7·12}$$

给定函数 $f\in L^2(\Omega)$，考虑边值问题

$$\begin{cases}Au=f & \text{在}\ \Omega\ \text{内}\\ B_j u=0 & \text{在}\ \partial\Omega\ \text{上},\ 0\leqslant j\leqslant m-1\end{cases} \tag{7·13}$$

其中 $A$ 是由(7·12) 式定义的，$B_j$ 是 $m-j-1$ 阶非线性偏微分算子. 仿照对问题 (7·5) 和 (7·6) 的处理，我们作算子 $A$ 的广义 Dirichlet 型

$$a(u,v)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)D^\alpha v\,dx \quad \forall u,v\in H^m(\Omega) \tag{7·14}$$

回想起从(7·5)引出(7·10)，从(7·6)引出(7·11)，我们着手统一处理各类问题. 取闭线性子空间$V$满足关系：

$H_0^m(\Omega)\subset V\subset H^m(\Omega)$，$V$ 是可分 Hilbert 空间.

记

$$\langle f,v\rangle=\int_\Omega f(x)v(x)\,dx \qquad \forall v\in V$$

**定义 7·4** 设 $f\in V$. 如果$V$中的$u$满足

$$a(u,v)=\langle f,v\rangle \qquad \forall v\in V \tag{7·15}$$

则称$u$是方程 $Au=f$ 相应于子空间$V$的变动边值问题的解.

为什么称为变动边值问题呢？因为当把$V$取成介于$H_0^m(\Omega)$与$H^m(\Omega)$之间不同子空间时，相应于$V$的变动边值问题表示不同类型的边值问题. 例如，当取$V=H_0^1(\Omega)$时，方程$-\Delta u+u=f$相应于$V$的变动边值问题的解是(7·5)的广义解；当取$V=H^1(\Omega)$时，方程$-\Delta u+u=f$相应于$V$的变动边值问题的解是(7·6)的广义解.

一般地，根据空间$V$的选择不同，问题(7·15)相应于方程$Au=f$的不同边界条件，这里仅列出结果，就不给出证明了。

1° 当$V=H_0^m(\Omega)$时，(7·15)的解$u$是广义 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}Au=f, & x\in\Omega\\ \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}=0, & x\in\partial\Omega \quad j=0,1,\cdots,m-1\end{cases}$$

的广义解，其中$\dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$是外法向导数。

2° 当$V=H^m(\Omega)$时，(7·15)的解$u$是方程$Au=f$的广义 Neumann 边值问题的广义解。

3° 当$H_0^m(\Omega)\subsetneqq V\subsetneqq H^m(\Omega)$时，(7·15)的解$u$是方程$Au=f$的混合型边值问题的广义解。

现在考虑问题(7·15)，用 $E_+^1$ 表$[0, +\infty)$. 若存在连续函数 $g: E_+^1 \to E_+^1$, 使得

$$|a(u,v)| \leqslant g(\|u\|_m)\|v\|_m \tag{7·16}$$

则对任一固定的 $u \in V$, $a(u, \cdot)$ 是 $V$ 上的有界线性泛函，从而存在唯一的 $w \in V$, 使得

$$a(u,v) = \langle w, v \rangle_m, \qquad \forall v \in V$$

其中$\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ 是按(7·4)式定义的内积. 令 $Tu = w$, 于是它定义了一个算子 $T: V \to V$ (一般来说是非线性的), 满足

$$a(u,v) = \langle Tu, v \rangle \qquad \forall v \in V$$

联合(7·15)式得

$$Tu = f \tag{7·17}$$

因此，$Au = f$ 相应于子空间 $V$ 的变动边值问题的解是抽象算子方程(7·17)的解，反之，显然(7·17)的解是 $Au = f$ 相应于 $V$ 的变动边值问题的解.

为了表达清楚起见，记 $u_\alpha = D^\alpha u (\alpha = 0, 1, \cdots, m)$, $u_0 = D^0 u = u$, 算子 $A$(见(7·13))中的 $A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u)$ 就简记成 $A_\alpha(x, u_0, u_1, \cdots, u_m)$.

**定理 7·1** 设 $\Omega$ 是 $E^n$ 中的有界开区域，其边界是充分光滑的. 又设由(7·13)式表达的算子 $A$ 满足下列条件:

(i) 每一个 $A_\alpha$ 是 Caratheodory 函数，即对几乎所有 $x \in \Omega$, $A_\alpha$ 关于 $(u_0, u_1, \cdots, u_m)$ 连续，每一组 $(u_0, u_1, \cdots, u_m)$ 关于 $x$ 在 $\Omega$ 上可测且存在 $a \in L^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, $b > 0$, 使得

$$|A_\alpha(x, u_0, u_1, \cdots u_m)| \leqslant a(x) + b\sum_{\alpha=0}^{m} |u_\alpha| \tag{7·18}$$

(ii) 对任一 $x \in \Omega$ 及任何 $(u_0, u_1 \cdots, u_m)$, $(u_0', u_1', \cdots, u_m')$, 有

$$\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} [A_\alpha(x, u_0, u_1, \cdots, u_m)$$

$$-A_\alpha(x,u_0',u_1',\cdots,u_m')](u_\alpha-u_\alpha')\geqslant 0$$

(iii) 存在 $c_0>0$ 和函数 $h\in L(\Omega)$，使得当 $x\in\Omega$ 时，有

$$\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}A_\alpha(x,u_0,u_1,\cdots,u_m)u_\alpha\geqslant c_0\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|u_\alpha|^2-h(x)$$

则对任一 $f\in V$，$Au=f$ 相应于子空间 $V$ 的变动边值问题的解恒存在.

**证明** 由 (7·18) 容易直接验证，当 $u\in H^m(\Omega)$ 时，$A_\alpha(x,u(x),\cdots,D^m u(x))\in L^2(\Omega)$ 且 $\forall u,v\in H^m(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega A_\alpha(x,u,\cdots D^m u)D^\alpha v\,dx\right|$$

$$\leqslant\left(\int_\Omega|A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|D^\alpha v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left[\left(\int_\Omega|a(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+b\left(\sum_{0\leqslant|\beta|\leqslant m}\int_\Omega|D^\beta u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\int_\Omega|D^\alpha v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=(\|a\|+b\|u\|_m)\left(\int_\Omega|D^\alpha v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant(\|a\|+b\|u\|_m)\|v\|_m$$

对 $\alpha$ 求和并回顾(7·14)式得

$$|a(u,v)|\leqslant g(\|u\|_m)\|v\|_m$$

其中 $g(r)=m(\|a\|+br)$，即 $a(u,v)$ 满足(7·16). 因而，存在算子 $T:V\to V$，使得求解 $Au=f$ 相应于子空间 $V$ 的变动边值问题等价于在 $V$ 内求解方程 $Tu=f$. 下面我们来证明 $Tu=f$ 有解.

1° $T$ 是次连续的. 由(7·18)并仿照第一章定理 1·1 的证明，容易知道 Carathéodory 映射 $(F_\alpha u)(x)=A_\alpha(x,u_0(x),u_1(x),\cdots,u_m(x))$ 从 $L^{2,m+1}(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 连续（见第四章 § 1）. 设在 $V$ 内，$u_n\to u$，即 $\|u_n-u\|\to 0$. 注意到(7·4)，可知在 $L^2(\Omega)$ 内，有 $D^\alpha u_n\to D^\alpha u\,(n\to\infty,0\leqslant|\alpha|\leqslant m)$. 于是，$\forall v\in V$ 有

$$|\langle Tu_n - Tu, v\rangle| = |a(u_n, v) - a(u, v)|$$

$$= \left| \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega [A_\alpha(x, u_n, \cdots D^m u_n) - A_\alpha(x, u, \cdots D^m u] \cdot D^\alpha v\, dx \right|$$

$$\leqq \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \left( \int_\Omega | A_\alpha(x, u_n, \cdots, D^m u_n) \right.$$

$$\left. - A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u) |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega |D^\alpha v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

因此，当在 $V$ 内 $u_n \to u$ 时，$\langle Tu_n - Tu, v\rangle \to 0$.

2° $T$ 是单调的. 由假设(ii)，对任何 $u, v\in V$,

$$\langle Tu - Tv, u - v\rangle = a(u, u-v) - a(v, u-v)$$

$$= \int_\Omega \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} [A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u) - A_\alpha(x, v, \cdots, D^m v)]$$

$$\cdot (D^\alpha u - D^\alpha v)\, dx \geqslant 0$$

3° $T$ 是强制的. 从条件(iii)推得

$$\langle Tu, u\rangle = a(u, u)$$

$$= \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u) D^\alpha u\, dx$$

$$\geqslant C_0 \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx - \int_\Omega h(x)\, dx$$

$$= C_0 \|u\|_m^2 - h_0$$

其中 $h_0 = \int_\Omega h(x)\, dx$. 可见 $T$ 是强制的.

总之，由定理 4·4, $\forall f\in V, Tu = f$ 可解.

证毕

最后，我们指出条件(ii)表明算子 $A$ 是非线性椭圆型的.

## §8 在凸规划上的应用

每个数学规划问题都可以化成求目标函数在某一集合上达到

下确界所需要的条件. 第四章§3曾给出可微分泛函取极小的必要条件. 但是，现代规划论中常出现求不可微分泛函的最小值问题. 设$X$为实线性赋范空间，$\Omega$是$X$的非空子集. 给定正则泛函$\varphi:\Omega\to\bar{E}^1$和泛函$f_i:X\to E^1, g_j:X\to E^1(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m)$. 最优化问题是: 求$x^*\in\Omega$,使得

$$\varphi(x^*)=\inf_{x\in\Omega}\varphi(x)=a \tag{8·1}$$

且满足

$$f_i(x)\leqslant 0 \quad i=1,\cdots,n \tag{8·2}$$

$$g_j(x)=0 \quad j=1,\cdots,m \tag{8·3}$$

称$x^*$是最优化问题(8·1)-(8·3)的最优点，而相应的目标泛函值$\varphi(x^*)$称为最优值,称$(x^*,\varphi(x^*))$是最优解. 但是,习惯上常把$x^*$称为最优解. 当$\Omega$是凸集,$\varphi, f_i, g_i$都是凸泛函时，上述问题就成为凸规划问题. 这里我们不考虑带不等式约束(8·2)和等式约束(8·3)的问题,只考虑无约束凸规划问题(8·1). 下列定理用到§5中的凸集$\Omega$上的指示函数$I_\Omega(x)$.

**定理8·1**(Pschenlischny, Rockafellar) 设$X$为Banach空间,$\Omega\subset X$是非空凸集,$\varphi:X\to E^1$是凸泛函. 此外,假设还满足:

$$\Omega^\circ\neq\varnothing\text{或者}\varphi\text{在}\Omega\text{中某点}x_0\text{连续} \tag{8·4}$$

则下列三个结论等价.

(i) $x^*$是(8·1)的解;

(ii) $\theta\in\partial\varphi(x^*)+\partial I_\Omega(x^*)$;

(iii) 对任何$x\in\Omega, h\in X, \delta_+\varphi(x)h$总存在且

$$\delta_+\varphi(x^*)(x-x^*)\geqslant 0,\quad \forall x\in\Omega$$

此外,还有以下结论.

(iv) $\varphi$在$\Omega$上的局部极小也是$\varphi$在$\Omega$上的最小值;若用$\mathscr{L}$表示(8·1)的解集;则

(v) $\mathscr{L}$是凸集;

(vi) 若$\varphi$下半连续，$\Omega$是闭集，则$\mathscr{L}$是闭集；

(vii) 若$\varphi$是$\Omega$上的严格凸泛函，则$\mathscr{L}$最多是单点集.

**证明** 显然$x^*$是问题(8·1)的解等价于$x^*$是

$$\min_{x\in\Omega}(\varphi(x)+I_\Omega(x))=a \tag{8·5}$$

的解. 由次微分的性质，$x^*$是(8·5)的解等价于$\theta\in\partial(\varphi+I_\Omega)(x^*)$. 注意到$I_\Omega(x)$是凸泛函及条件(8·4)，由定理5·5，有

$$\partial(\varphi+I_\Omega)(x^*)=\partial\varphi(x^*)+\partial I_\Omega(x^*)$$

所以(i)与(ii)等价.

今证(i)与(iii)等价. 记$\psi(t)=\varphi(x+th)$ ($t\in[-1,1]$). 由于$\varphi$是凸泛函，易知$\psi$是$[-1,1]$上的凸函数. 再由定理5·2的推论知$\psi$是连续的. 根据定理5·1，连续凸函数的左、右导数总存在，所以，对任何$x\in\Omega$及$h\in X$，$\delta_+\varphi(x)h=\psi'_+(0)$存在并且还有$\psi(1)-\psi(0)\geqslant\psi'_+(0)$. 这表明

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)\geqslant\delta_+\varphi(x)h \tag{8·6}$$

如果$x^*$是(8·1)的解，则对任何$t\in[0,1]$，有$\psi(t)\geqslant\psi(0)$. 于是，$\psi'_+(0)\geqslant0$. 取$h=x-x^*$，得

$$\delta_+\varphi(x^*)(x-x^*)=\psi'_+(0)\geqslant0$$

反之，设对一切$x\in\Omega$，有

$$\delta_+\varphi(x^*)(x-x^*)\geqslant0$$

在(8·6)式中令$x=x^*$，$h=x-x^*$，得

$$\varphi(x)-\varphi(x^*)\geqslant0$$

即$x^*$是(8·1)的解.

证明(iv) 设$\varphi$在$x^*$取局部极小. 对任何$x\in\Omega$，作$\psi(t)=\varphi(x^*+t(x-x^*))$. 因为$\varphi$在$x^*$取局部极小，所以存在$\delta>0$，使得当$0\leqslant t<\delta$时，有$\psi(t)\geqslant\psi(0)$. 因为$\varphi$是凸泛函，所以$\psi$是凸函数. 由本章定理5·1，有$\psi(1)\geqslant\psi(0)$，即$\varphi(x)\geqslant\varphi(x^*)$. 可见

$\varphi(x^*)$是$\varphi$在整个$\Omega$上的最小值.

证明(v) 设$x, y \in \mathscr{L}$. 由于$\varphi$是凸泛函,故当$\lambda \in [0,1]$时,有

$$a \leqslant \varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda \varphi(x) + (1-\lambda) \varphi(y)$$
$$= \lambda a + (1-\lambda) a = a$$

可见$\lambda x + (1-\lambda) y \in \mathscr{L}$.

证明(vi) 设$x_n \in \mathscr{L}$, $x_n \to x$. 因$\Omega$是闭集，故有$x \in \Omega$. 又由$\varphi(x_n) = a$及$\varphi$的下半连续性,有

$$a \leqslant \varphi(x) \leqslant \underline{\lim_{n}} \varphi(x_n) = a$$

可见$x \in \mathscr{L}$.

证明(vii) 假若有$x^*$，$y^* \in \mathscr{L}$且$x^* \neq y^*$,则从$\varphi$的严格凸性,对$0 < \lambda < 1$就有

$$\varphi(\lambda x^* + (1-\lambda) y^*) < \lambda \varphi(x^*) + (1-\lambda) \varphi(y^*)$$
$$= \lambda a + (1-\lambda) a = a$$

这与$a$是$\varphi$的极小值发生冲突. 所以$\mathscr{L}$最多是单点集.

证毕

细心的读者会注意到,定理8·1 的结论(iv)~(vii)并不需要条件(8·4).

## 习 题

1. 设$T: E^n \to E^n$单调,且$T(E^n) = E^n$. 试证当$\|x\| \to \infty$时,$\|Tx\| \to \infty$.

2. 假设对某$\varepsilon > 0$,算子$T: B(\theta, r+\varepsilon) \subset E^n \to E^n$单调. 证明$T(\bar{B}(\theta, r))$是$E^n$中的有界集.

3. 设$X$为实 Banach 空间,$T: X \to X^*$半连续单调,$S: X \to X^*$是强连续的. 试证$T+S$是伪单调的.

4. 试证空间$l^p (1 < p < \infty)$上的正规对偶映射是(序列式)弱连续的.

5. 设$X$为实 Banach 空间. 算子$T: \mathscr{D}(T) \subset X \to X^*$称为在$x \in \mathscr{D}(T)$是局部半有界的，是指对任何$h \in X$，$t_n \geqslant 0$，$t_n \to 0$，$\{\|T(x + t_n h)\| \mid x + t_n h \in \mathscr{D}(T)\}$是有界集. 设$T: \mathscr{D}(T) \subset X \to X^*$是单调算子. 试证：$T$在$x \in \mathscr{D}(T)$

是局部半有界的当且仅当$T$在$x\in\mathscr{D}(T)$处是局部有界的.

6. 设$X$是Hilbert空间，$T$: $X\to X$是非扩展算子，证明$I-T$是单调的.

7. 设$X$是严格赋范的自反Banach空间，算子$T$: $X\to X^*$在$X$上半连续单调且强制. 又设当$x,y\in X$，$(Tx-Ty,x-y)=0$时，必有$\|x\|=\|y\|$. 试证对每一$w\in X^*$,方程$Tx=w$有唯一解.

8. 设$\varphi:E^1\to\overline{E^1}$给定如下:

$$\varphi(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2}, & 当|x|\leqslant 1\\ -\infty, & 否则\end{cases}$$

试问$\varphi$在每一点$x\in\mathrm{dom}\,\varphi$是否有次梯度?

9. 设$X$为实Hilbert空间，$T$: $X\to X$半连续单调. 又设对$y\in X$和某$r>0$,当$\|x\|\geqslant r$时,有$\langle Tx-y,x\rangle\geqslant 0$. 试证$y\in\mathscr{R}(T)$.

10. 设$\varphi$: $X\to\overline{E^1}$是正则凸下半连续泛函. 试证$T=\partial\varphi$是满射的当且仅当对一切$f\in X^*$,有

$$\varphi(x)-(f,x)\to\infty,\ 当\|x\|\to\infty$$

11. 设$X$为实自反Banach空间,$X^*$是严格凸的. 证明:正规对偶映射$J:X\to X^*$映$X$的单位球面成$X^*$的单位球面且为满射的.

12. 设$X,X^*$和$J$如上题,$T:X\to X$半连续. 假定存在$x_0$, $y_0\in X$,使得$(J(x-x_0),Tx-y_0)\geqslant 0,\forall x\in X$,试证$Tx_0=y_0$.

13. 设$X^*$是实的严格凸Banach空间. 试证: $X$上的正规对偶映射是线性的当且仅当$X$是Hilbert空间.

14. 设$X$为自反Banach空间,$L:X\to X^*$是线性单调算子且$R(L)$是闭集. 证明:$R(L)=X^*$当且仅当$L$是一对一的.

15. 设$X$为实Banach空间，$T$: $\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$是伪单调的且局部有界. 试证$T$在$\mathscr{D}(T)$上次连续.

16. 映射$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$称为循环单调的,是指对任何$n\in\mathscr{N}$和任一循环组$x_0,x_1,\cdots,x_n,x_n=x_0$,有

$$\sum_{j=1}^{n}(Tx_j,x_j-x_{j-1})\geqslant 0$$

证明循环单调映射必为单调的. 如果$X$是实Banach空间,$\varphi$: $X\to\overline{E^1}$是凸泛函,试证$\partial\varphi$是循环单调的.

17. 设 $X$ 为实自反 Banach 空间，算子 $T: X \to X^*$ 称为半单调的或为变分学型的，是指 $Tx = A(x,x)$，其中算子 $A: X\times X \to X^*$ 满足下列条件：

(i) 对固定的 $x\in X$，算子 $A(x,\cdot): X\to X^*$ 半连续且

$$(A(x,x)-A(x,y),x-y)\geqslant 0, \forall y\in X$$

(ii) 对固定的 $y\in X$，$A(\cdot,y): X\to X^*$ 是有界半连续算子；

(iii) 若 $x_n \rightharpoonup x$，$(A(x_n,x_n)-A(x_n,x),x_n-x)\to 0$，则对所有 $y\in X$，$A(x_n,y)\rightharpoonup A(x,y)$；

(iv) 若 $x_n \rightharpoonup x$，$A(x_n,y)\rightharpoonup f$，则 $(A(x_n,y),x_n)\to(f,x)$，试证半单调算子是伪单调的.

18. 设 $X$ 为自反 Banach 空间. 映射 $T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为 (M) 型的，是指它除满足伪单调映射定义中的 $(p_1)$ 和 $(p_3)$ 外，还满足下列条件：

若 $\{[x_n,f_n]\}\subset \mathscr{D}(T)$，$x_n\rightharpoonup x$，$f_n\rightharpoonup f$ 且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ (f_n,x_n-x)\leqslant 0$$

则 $[x,f]\in\mathscr{D}(T)$.

试证当 $\mathscr{D}(T)=X$ 时，伪单调映射必为 (M) 型的.

19. 设 $X$ 为实 Banach 空间. 映射 $T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为广义伪单调的，是指当 $\{[x_n,f_n]\}\subset\mathscr{D}(T)$，$x_n\rightharpoonup x$，$f_n\rightharpoonup f$ 且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (f_n,x_n-x)\leqslant 0$ 时，有 $[x,f]\in\mathscr{D}(T)$ 且 $(f_n,x_n)\to(f,x)\ (n\to\infty)$.

试证极大单调映射是广义伪单调的.

20. 设 $X$ 为实 Banach 空间，$C$ 是 $X$ 的闭凸集，$T: C\to 2^{X^*}$ 是极大单调的，$S: C\to 2^{X^*}$ 是有界广义伪单调的. 证明 $T+S$ 是广义伪单调的.

21*. 设 $T: \mathscr{D}(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 极大单调. 试证

$$\varphi(x)=\inf_{f\in Tx}\|f\|$$

是下半连续的.

# 第六章　集值映射的不动点

本章介绍一些集值映射的不动点定理及由此而推得的著名的 Von Neumann 极小极大定理.

## §1　集值映射不动点的存在性

首先我们把单值映射不动点的概念推广到多值情形.

**定义 1·1**　设 $M$ 为非空集合，$T: M\to 2^M$ 为集值映射. 若存在 $x\in M$，使得 $x\in Tx$，则称 $x$ 为 $T$ 的不动点.

我们自然要问，哪些算子(单值的)的不动点定理可推广到集值映射的情形？该如何推广呢？为此，需要引入下列概念：

**定义 1·2**　设 $(X,\rho)$ 为距离空间，$A,B\subset X$. 称

$$h(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}\rho(a,B),\sup_{b\in B}\rho(b,A)\}$$

为集 $A$ 与 $B$ 的 Pompeiu-Hausdorff 半距离，其中 $\rho(a,B)$ 是 $a$ 与 $B$ 之距离，$\rho(b,A)$ 是 $b$ 与 $A$ 之距离.

关于 Pompeiu-Hausdorff 半距离的详细讨论见 V. I. Istratescu, Fixed point theory, An introduction 一书的第十章. 下列结果是集值映射的 Banach 不动点定理.

**定理 1·1**　设 $(X,\rho)$ 为完备距离空间，$C\subset X$ 为非空闭集，映射 $T: C\to 2^C$ 且对任一 $x\in C$，$Tx$ 是非空闭集，又设存在 $\alpha\in(0,1)$，使得 $\forall x,y\in C$，有

$$h(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$$

则 $T$ 有不动点.

**证明** 任取 $\bar{\alpha}\in(\alpha,1)$，$x_0\in C$ 及 $x_1\in Tx_0$. 不妨设 $\rho(x_0,x_1)>0$，否则 $x_0$ 已是 $T$ 的不动点，依假设，有

$$\rho(x_1,Tx_1)\leqslant h(Tx_0,Tx_1)<\bar{\alpha}\rho(x_0,x_1)$$

由上列不等式又可取 $x_2\in Tx_1$，使得 $\rho(x_1,x_2)<\bar{\alpha}\rho(x_0,x_1)$. 按此法继续下去，可取 $\{x_n\}\subset C$，$x_{n+1}\in Tx_n$，满足

$$\rho(x_n,x_{n+1})<\bar{\alpha}^n\rho(x_0,x_1)\quad n\in\mathcal{N}$$

用证明 Banach 不动点定理的同样方法，由上列不等式知，存在 $x^*\in C$，$\rho(x_n,x^*)\to 0(n\to\infty)$. 由于

$$\rho(x_{n+1},Tx^*)\leqslant h(Tx_n,Tx^*)\leqslant\alpha\rho(x_n,x^*)\to 0$$

及 $Tx^*$ 之闭性，得 $x^*\in Tx^*$.

证毕

下列不动点定理对导出一般的集值映射不动点定理起着重要作用. 但它们的证明用到了关于单位分解及附属于某覆盖的连续单位分解的存在性. 这些内容详见本章最后一节.

**定理 1·2**(Browder, F. E., 1968) 设 $X$ 为自反 Banach空间，$C\subset X$ 为非空有界闭凸集，映射 $T:C\to 2^C$，对任一 $x\in C$，$Tx$ 为非空凸集. 此外，假设对任何 $f\in C$，$T^{-1}f=\{x\,|\,x\in C,\ f\in Tx\}$ 为 $C$ 中的相对弱开集. 则 $T$ 在 $C$ 内有不动点.

**证明** 因为对每一 $f\in C$，$T^{-1}f$ 为弱开集，而且 $C$ 中每一 $x$ 至少属于某一这类弱开集，可见，这类弱开集覆盖了 $C$. 依假设，$C$ 是弱紧的，因而存在 $\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}\subset C$，使得 $C=\bigcup_{i=1}^{n}T^{-1}x_i$，设 $\alpha_1(x)$，$\cdots$，$\alpha_n(x)$ 是附属于这个覆盖的单位分解. 对每一 $i$ ($i=1,\cdots,n$)，若 $\alpha_i(x)>0$，则 $x\in T^{-1}x_i$，从而 $x_i\in Tx$. 令 $Px=\alpha_1(x)x_1+\cdots+\alpha_n(x)x_n$. 因为 $Tx$ 与 $C$ 皆为凸集，$T(C)\subset C$，所以对任何 $x\in C$，$Px\in Tx$，即 $P:C\to C$.

作单纯形 $S=\mathrm{co}\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$ 及有限维线性空间 $F=\mathrm{span}$

$\{x_1, \cdots, x_n\}$，因为$X$在$F$上诱导的拓扑与欧氏拓扑等价，故$S$与欧氏空间的某球同胚．因为算子$P$连续且$P(S)\subset S$，由 Brouwer 不动点定理，$P$在$S$内有不动点，即$x^*=Px^*\in Tx^*$.

证毕

由上述定理可得关于变分不等式有解的一个重要结果.

**推论**(Browder, F. E., 1968)　设$X$为自反 Banach 空间，$C\subset X$是非空有界闭凸集，算子$T:C\to X^*$按$X$的弱拓扑到$X^*$依模拓扑是连续的，则存在$x\in C$，使得

$$(Tx, x-y)\geqslant 0, \qquad \forall y\in C$$

**证明**　倘若结论不真，则对每一$x\in C$，存在$y\in C$，有$(Tx, x-y)<0$．作映射$P:C\to 2^C$，

$$Px=\{y\,|\,y\in C, (Tx, x-y)<\theta\}, \quad x\in C$$

显然，$Px$是非空凸开集．由对$T$的连续性假设，对任一$y\in C$，$P^{-1}y$是$C$中弱开集．由定理 1·2，存在$x^*\in C$，使得$x^*\in Px^*$．但这样，发生$(Tx^*, x^*-x^*)<0$，矛盾.

证毕

**定理 1·3**(Browder, F. E., 1968)　设$X$为自反 Banach 空间，$C\subset X$是非空紧凸集，映射$T:C\to 2^X$在$C$上是上半连续的且对每一$x\in C$，$Tx$是非空闭凸集．此外，对任一$x\in\partial C$，存在$f\in Tx$，$g\in C$和$t>0$，使得$f=x+t(g-x)$．则$T$在$C$内有不动点.

**证明**　作$Px\equiv\{x\}-Tx$，则映射$P:C\to 2^X$．显然，对任何$x\in C$，$Px$非空闭凸．倘若$T$在$C$内没有不动点，则对任何$x\in C$，$\theta\notin Px$．从而对任一$x\in C$，存在$Px$的领域$N(Px)$，使得$\theta\notin N(Px)$．由凸集第一分离定理，对任一$x\in C$，存在$w(x)\in X^*$，使得

$$(w(x), z)<0, \quad \forall z\in N(Px) \tag{1·1}$$

对任一$w\in X^*$，作集合

$$u(w)=\{y\,|\,y\in C, (w, z)<0, z\in Py\} \tag{1·2}$$

根据(1·1)式，对任一 $x\in C$，$u(w(x))\neq\varnothing$. 因 $P$ 是上半连续的，故对任一 $x\in C$，存在相对于 $C$ 的开邻域 $v(x)$，使得对一切 $y\in v(x)$，有 $Py\subset N(Px)$. 由(1·2)式，对一切 $z\in Py$，有 $(w(x),z)<0$，其中 $y\in v(x)$ 是任意的，而 $v(x)\subset u(w(x))$. 总之，开邻域族 $\{v(x)\}_{x\in C}$ 覆盖了 $C$. 因 $C$ 是紧的，故可用有限个 $\{v(x_1),\cdots,v(x_n)\}$ 覆盖 $C$. 作附属于这个覆盖的单位分解 $\alpha_1(x),\cdots,\alpha_n(x)$ 及

$$Q(x)=\alpha_1(x)w(x_1)+\cdots+\alpha_n(x)w(x_n)\quad(x\in C)$$

则 $Q(x)$ 在 $C$ 上按 $X$ 的弱拓扑到 $X^*$ 依模拓扑连续.

下证对任何 $x\in C$，有

$$0>(Qx,z)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)(w(x_i),z)\quad(\forall z\in Px)\qquad(1\cdot3)$$

事实上，依单位分解的含意，对任何 $x\in C$，至少存在一个 $k\in\{1,\cdots,n\}$，使得 $\alpha_k(x)>0$. 另一方面，由于 $x\in v(x_i)\subset u(w(x_i))$ 及(1·2)式，对任一 $z\in Px$，有 $(w(x_i),z)<0$，$i=1,\cdots n$.

因为映射 $Q$ 满足定理 1·2 的推论的全部假设，所以存在 $x\in C$，使得

$$(Qx,x-z)\geqslant0\quad\forall z\in C\qquad(1\cdot4)$$

倘若 $x\in C^\circ$，则对每一 $h\in X$，必存在 $t>0$，使得 $x+th\in C$ 和 $x-th\in C$. 在(1·4)式中分别用 $x+th$ 与 $x-th$ 代替 $z$，于是得 $(Qx,h)\geqslant0$ 且 $(Qx,h)\leqslant0$. 因而 $Qx=\theta$，此与(1·3)式矛盾. 次设 $x\in\partial C$，则根据假设，存在 $f\in Tx$，$g\in C$ 和 $t>0$，使得 $f=x+t(g-x)$. 在(1·4)式中以 $g$ 代 $z$，则得 $(Qx,\ x-g)\geqslant0$. 因 $t>0$，故有 $(Qx,x-f)\geqslant0$. 由于 $x-f\in Px$，这样也与(1·3)式发生矛盾.

总之，假定 $T$ 在 $C$ 内没有不动点不对，故 $T$ 在 $C$ 内有不动点.

证毕

在定理 1·3 的假设中关于映射 $T$"向内的"边界条件"对任一 $x\in\partial C$，存在 $f\in Tx$，$g\in C$ 和 $t>0$，使得 $f=x+t(g-x)$"也可换成

"向外的"边界条件,即"对任一 $x\in\partial C$,存在 $f\in Tx, g\in C$ 和 $t>0$,使得 $f=x-t(g-x)$". 其证明方法只需把(1·4) 式中的"$<$"及后边相应的"$<$"换成"$>$".

利用定理 1·3, 易导出下列结果, 它是 Schauder 不动点定理的多值推广:

**定理 1·4**(Bohnenblust, H. F. 和 Karlin, S., 1950; Glicksberg, I. L., 1952) 设 $X$ 为自反 Banach 空间, $C\subset X$ 是非空紧凸集, 映射 $T:C\to 2^C$ 上半连续且对任一 $x\in C$, $Tx$ 是非空闭凸集, 则 $T$ 在 $C$ 内有不动点.

**证明** 显然, $T(C)\subset C$. 对任一 $x\in\partial C$, 只需取 $g=f\in Tx, t=1$, 便满足定理 1·3 的全部假设.

证毕

**定理 1·5**(Bohnenblust, H. F., Karlin, S., 1950) 设 $X$ 为自反 Banach 空间, $C\subset X$ 是非空闭凸集, $T:C\to 2^C$ 上半连续. 又设对任一 $x\in C$, $Tx$ 是非空闭凸集且 $\mathscr{R}(T)\subset C$ 相对紧. 则 $T$ 在 $C$ 内有不动点.

**证明** 令 $K=\overline{\mathrm{co}}\mathscr{R}(T)$, 由 Mazur 定理, $K$ 是紧凸集. 显然 $K\subset C$, 故 $T:K\to 2^K$ 满足定理 1·4 的全部条件. 因此, $T$ 在 $K$ 内有不动点.

证毕

## §2 极小极大定理

本节我们利用多值映射的不动点定理来证明著名的 Von Neumann 极小极大定理.

我们来考虑对策论中的一个问题. 设两人 $P_1$, $P_2$ 进行博奕. 他们分别拥有策略集 $C_1$ 和 $C_2$. 当 $P_1$ 取 $x_1\in C_1$, $P_2$ 取 $x_2\in C_2$ 时, $P_1$ 损失为 $\varphi(x_1,x_2)$, $P_2$ 正好赢得 $\varphi(x_1,x_2)$. 假定两个人彼此完全

独立行动．这是一个二人零和博奕．$P_1$ 的目的是如何选择策略 $x_1\in C_1$，使得 $\sup\limits_{z_2\in C_2}\varphi(x_1,z_2)$ 尽可能的小，而 $P_2$ 致力于如何选择 $x_2\in C_2$，使得 $\inf\limits_{z_1\in C_1}\varphi(z_1,x_2)$ 尽可能的大．记

$$f(z_1)=\sup_{z_2\in C_2}\varphi(z_1,z_2),\quad z_1\in C_1$$

$$g(z_2)=\inf_{z_1\in C_1}\varphi(z_1,z_2),\quad z_2\in C_2$$

这样一来，他们各自的有利策略是

$$P_1 \text{ 取 } \bar{x}_1\in C_1\text{，使得}\quad f(\bar{x}_1)=\min_{z_1\in C_1}f(z_1)$$

$$P_2 \text{ 取 } \bar{x}_2\in C_2\text{，使得}\quad g(\bar{x}_2)=\max_{z_2\in C_2}g(z_2)$$

显然有 $g(\bar{x}_2)\leqslant f(\bar{x}_1)$．如果能选择 $\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$，使得 $g(\bar{x}_2)=f(\bar{x}_1)$，则称 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$ 是对他们都有利的策略．极小极大理论是研究存在如此的 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 的条件．

**定义 2·1** 设$X$为线性空间，$C\subset X$ 为凸集，泛函 $\varphi:C\to E^1$ 称为拟凸的，是指对任何 $t\in(0,1)$，$x,y\in C$，有

$$\varphi(tx+(1-t)y)\leqslant\max\{\varphi(x),\varphi(y)\}$$

如果当 $x\neq y$ 时，必为不等号，则称 $\varphi$ 为严格拟凸的．

**引理 2·1** 泛函 $\varphi:C\subset X\to E^1$ 是拟凸的充要条件是对任何 $r\in E^1$，$e_r(\varphi)=\{z\mid z\in C,\varphi(z)\leqslant r\}$ 是凸集．

**证明** 留给读者作为习题．

**引理 2·2** 设$X$为自反 Banach 空间，$C\subset X$ 是非空有界闭凸集且 $\varphi:C\to E^1$ 是拟凸的和下半连续的泛函，则 $\varphi$ 在 $C$ 上有最小值．

**证明** 根据假设，$C$ 是弱紧集．由引理 2·1，对任何 $r\in E^1$，$e_r(\varphi)$ 是凸集．依假设 $e_r(\varphi)$ 是闭集，从而是弱序列闭的．由第四章定理 2·1，$\varphi$ 是弱下半连续的．最后从第四章定理 3·2 知结论为真．

证毕

有了以上准备，我们有下列重要结果.

**定理 2·1**(Neumann, J. V., Fan, Ky) 设 $X_1$, $X_2$ 皆为自反 Banach 空间，$C_1\subset X_1$, $C_2\subset X_2$ 均为非空有界闭凸集. 又设映射 $\varphi: C_1\times C_2\to E^1$, 对任一 $x_2\in C_2$, $\varphi(\cdot, x_2): C_1\to E^1$ 是拟凸和下半连续的；对任一 $x_1\in C_1$, $-\varphi(x_1,\cdot): C_2\to E^1$ 也是拟凸和下半连续的. 则存在 $\bar{x}_1\in C_1$, $\bar{x}_2\in C_2$, 使得

$$\min_{z_1\in C_1}\sup_{z_2\in C_2}\varphi(z_1,z_2)=f(\bar{x}_1)=g(\bar{x}_2)=\max_{z_2\in C_2}\inf_{z_1\in C_1}\varphi(z_1,z_2)$$

**证明** 依前面引入的记号，$f(z_1)=\sup\limits_{z_2\in C_2}\varphi(z_1, z_2)$, $g(z_2)=\inf\limits_{z_1\in C_1}\varphi(z_1,z_2)$. 先来证明存在 $\bar{x}_1\in C_1$, 使得 $f(\bar{x}_1)=\min\limits_{z_1\in C_1}f(z_1)$. 注意到在定理的假设条件下，因为

$$\sup_{z_2\in C_2}\varphi(z_1,z_2)=-\inf_{z_2\in C_2}(-\varphi(z_1,z_2))\quad z_1\in C_1$$

及引理 2·2，其上式右端的下确界不仅存在，而且是最小值，可见，$f(z_1)$ 有意义. 今证 $f(z_1)$ 是下半连续的. 事实上，对任何 $x_1\in C_1$, $r\in E^1$,

$$f(x_1)>r \Longleftrightarrow \text{存在 } z_2\in C_2, \text{使 } \varphi(x_1,z_2)>r$$

由此得

$$\{z_1 | z_1\in C_1,\ f(z_1)>r\}=\bigcup_{z_2\in C_2}\{z_1 | z_1\in C_1, \varphi(z_1,z_2)>r\}.$$

因为 $\varphi(\cdot,z_2)$ 是下半连续的，所以上式右端的每一集合都是开集，从而左端是开集. 因此，$f(z_1)$ 是下半连续的.

$\forall x, y\in C_1$, 记 $r=\max\{f(x), f(y)\}$, 则 $\varphi(x,z_2)\leqslant r$, $\varphi(y,z_2)\leqslant r$. 因 $\varphi(\cdot,z_2)$ 是拟凸的，所以 $\forall t\in[0,1]$, $z_2\in C_2$, 有

$$\varphi(tx+(1-t)y, z_2)\leqslant\max\{\varphi(x,z_2), \varphi(y,z_2)\}\leqslant r$$

从而

$$f(tx+(1-t)y)=\sup_{z_2\in C_2}\varphi(tx+(1-t)y, z_2)\leqslant r$$

故 $f(tx+(1-t)y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$，$f(z_1)$是拟凸的．按引理 2·2，存在 $\bar{x}_1\in C_1$，使得 $f(\bar{x}_1)=\min\limits_{z_1\in C_1}f(z_1)$．

完全类似地可证明，存在 $\bar{x}_2\in C_2$，使得 $g(\bar{x}_2)=\max\limits_{z_2\in C_2}g(z_2)$．前面已指出，$g(\bar{x}_2)\leqslant f(\bar{x}_1)$．

下证 $g(\bar{x}_2)\geqslant f(\bar{x}_1)$．$\forall\alpha>0$，令 $t_1=g(\bar{x}_2)+\alpha$，$t_2=f(\bar{x}_1)-\alpha$．我们定义多值映射 $T:C_1\times C_2\to 2^{C_1\times C_2}$ 如下：

$$T(x_1,x_2)=\{[w_1,w_2]\in C_1\times C_2,\varphi(w_1,x_2)<t_1,\ \varphi(x_1,w_2)<t_2\}$$

因为 $\forall[x_1,x_2]\in C_1\times C_2$，有

$$\min_{z_1\in C_1}\varphi(z_1,x_2)\leqslant g(\bar{x}_2)<t_1$$

$$\max_{z_2\in C_2}\varphi(x_1,z_2)\geqslant f(\bar{x}_1)>t_2$$

故 $T(x_1,x_2)\neq\varnothing$，$\mathscr{D}(T)=C_1\times C_2$．从上列关系式易知，当 $[w_1,w_2]\in C_1\times C_2$ 时，有

$$T^{-1}(w_1,w_2)=\{[x_1,x_2]\,|\,[x_1,x_2]\in C_1\times C_2,\ \varphi(w_1,x_2)<t_1,\varphi(x_1,w_2)>t_2\}$$

我们来证明 $T(x_1,x_2)$是凸集．为此 $\forall x_2\in C_2$，考虑集合

$$W_1=\{w_1\,|\,w_1\in C_1,\varphi(w_1,x_2)<t_1\}$$

设$u_1,v_1\in W_1$，则 $\varphi(u_1,x_2)\leqslant r<t_1$，$\varphi(v_1,x_2)\leqslant r<t_1$，其中 $r=\max\{\varphi(u_1,x_2),\ \varphi(v_1,x_2)\}$．依定理假设 $e_r(\varphi(\cdot,x_2))$ 是凸集，所以 $\varphi(tu_1+(1-t)v_1,x_2)\leqslant r<t_1$，故集合 $W_1$ 是凸的．完全类似地可证 $\forall x_1\in C_1$，集$W_2=\{w_2\,|\,w_2\in C_2,\varphi(x_1,\ w_2)>t_2\}$也是凸集．于是，$\forall[x_1,x_2]\in C_1\times C_2$，$T(x_1,x_2)=W_1\times W_2$ 是乘积空间 $X_1\times X_2$ 中的凸集．此外，实际上前面已证明集

$$Z_1=\{z_1\,|\,z_1\in C_1,\varphi(z_1,w_2)\leqslant t_2\}$$

对任何 $w_2\in C_2$ 也是凸集．因为 $\varphi(\cdot,w_2)$是下半连续的，故 $Z_1$ 是相对闭集．从而集 $Z_1$ 是相对弱闭的．于是，其余集$\{x_1\,|\,x_1\in C_1,\varphi(x_1,$

$w_2) > t_2\}$ 对任何 $w_2 \in C_2$，是 $C_1$ 的相对弱开集. 用类似的方法可讨论集合 $\{x_2 | x_2 \in C_2, \varphi(w_1, x_2) < t_1\}$，它是 $C_2$ 的相对弱开集. 这样，我们就证明了，若对乘积空间 $X_1 \times X_2$ 赋予 $X_1$ 的弱拓扑与 $X_2$ 的弱拓扑的乘积拓扑，则

$$T^{-1}(w_1, w_2) = W_1 \times W_2$$

是 $X_1 \times X_2$ 中关于 $C_1 \times C_2$ 的相对弱开集.

以上我们证明了映射 $T$ 在 $C_1 \times C_2$ 上满足定理 1·2 的全部条件. 所以 $T$ 在 $C_1 \times C_2$ 内有不动点 $[x_1^*, x_2^*]$，即

$$f(\bar{x}_1) - \alpha < \varphi(x_1^*, x_2^*) < g(\bar{x}_2) + \alpha$$

因为 $\alpha$ 是任意的，令 $\alpha \to 0$，得 $f(\bar{x}_1) \leqslant g(\bar{x}_2)$. 所以 $f(\bar{x}_1) = g(\bar{x}_2)$.

## *§3 单位分解

关于单位分解的概念及附属于某局部有限的开覆盖的连续单位分解的存在性，不仅在证明本章定理 1·2 和 1·3 时用到它们，而且，实际上，在第三章 Dugundji 扩张定理的证明中，第五章 Debrunner-Flor 不等式（引理 4·1）的证明中已经做出了具体的连续单位分解. 单位分解在非线性泛函分析中是基本的证明工具.

**定义 3·1** 设 $X$ 是 Hausdorff 拓扑空间，$\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族从 $X$ 到 $[0, 1]$ 的连续映射，称 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为 $X$ 上的连续单位分解，是指 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 满足下列条件：

(i) $\{\mathrm{supp}(f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ 是局部有限族；

(ii) $\sum\limits_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = 1 \qquad (x \in X)$.

如果 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 $X$ 的开覆盖且 $\mathrm{supp}(f_\alpha) \subset A_\alpha (\alpha \in I)$，则称 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是附属于覆盖 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 的连续单位分解.

由于 $\{\mathrm{supp}(f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ 是局部有限族，所以$\sum\limits_{\alpha\in I}f_\alpha(x)$是有限求和.

**Urysohn 引理** 设 $A, B$ 是距离空间$X$的两个非空闭集，并且 $A\cap B=\varnothing$，则存在定义在$X$上取值于$[0,1]$的连续函数 $f$，使得当 $x\in A$ 时，$f(x)=1$，而当 $x\in B$ 时，$f(x)=0$.

应用 Tietze-Urysohn 扩张定理（第三章引理 3·1）可直接推出 Urysohn 引理.

**引理 3·1** 设$X$是距离空间，$\{A_n\}_{n\in\mathscr{N}}$ 是$X$ 的局部有限开覆盖，则存在$X$的开覆盖$\{B_n\}_{n\in\mathscr{N}}$，使得 $\overline{B}_n\subset A_n(n\in\mathscr{N})$.

**证明** 我们对 $n$ 归纳地来定义开集族$\{B_n\}_{n\in\mathscr{N}}$，使得

(i) $\overline{B}_n\subset A_n$

(ii) $\left(\bigcup\limits_{k\leq n}B_k\right)\cup\left(\bigcup\limits_{j>n}A_j\right)=X$.

假定对 $n<m$，已经定义了 $B_n$，则$\left(\bigcup\limits_{n<m}B_n\right)\cup\left(\bigcup\limits_{j\geqslant m}A_j\right)=X$. 设

$C=\left(\bigcup\limits_{n<m}B_n\right)\cup\left(\bigcup\limits_{j>m+1}A_j\right)$，于是，我们有 $X\setminus A_m\subset C$.

下面我们来证明存在开集$V$，使得 $X\setminus A_m\subset V\subset\overline{V}\subset C$. 如果$X=A_m$，我们取 $V=\varnothing$. 如果 $C=X$，我们取 $V=X$. 如果 $X\setminus A_m$ 与 $X\setminus C$ 都非空，则由 Urysohn 引理有连续映射 $f:X\to[0,1]$，使 $f(x)=0(x\in X\setminus A_m)$，而 $f(x)=1(x\in X\setminus C)$. 取 $V=\left\{x\mid f(x)<\frac{1}{2}\right\}$，显然$V$是开集，且

$$\overline{V}=\left\{x\mid f(x)\leqslant\frac{1}{2}\right\}\subset C$$

令 $B_m=X\setminus\overline{V}$，那么 $\overline{B}_m\subset X\setminus V\subset A_m$，$B_m\cup C=X$. 因此，$B_n(n\leqslant m)$满足条件 (i)、(ii). 由归纳原理可做出满足 (i) 和 (ii) 的一列

$B_n(n\in\mathscr{N})$. 而对每个$x\in X$，存在$n\in\mathscr{N}$，使$x\overline{\in}A_m(m>n)$，因而对某$k\leqslant n$，有$x\in B_k$. 故$\{B_n\}_{n\in\mathscr{N}}$覆盖了$X$.

证毕

**定理 3·1** 设$X$是距离空间，$\{A_n\}_{n\in\mathscr{N}}$是$X$的局部有限的开覆盖，则在$X$上存在附属于$\{A_n\}_{n\in\mathscr{N}}$的连续单位分解.

**证明** 由引理 3·1，有$X$的开覆盖$\{B_n\}_{n\in\mathscr{N}}$，使$\overline{B}_n\subset A_n(n\in\mathscr{N})$. 显然$\{B_n\}_{n\in\mathscr{N}}$是局部有限的. 据 Urysohn 引理，对每个$n$存在一连续映射$h_n: X\to[0,\ 1]$，使$h_n(x)=1(x\in\overline{B}_n)$而$h_n(x)=0(x\in X\backslash A_n)$. 取$\left(h_n-\frac{1}{2}\right)$的正部，记$g_n(x)=\left(h_n-\frac{1}{2}\right)^+(x)$，则$\mathrm{supp}(g_n)\subset\left\{x\in X\mid h_n(x)\geqslant\frac{1}{4}\right\}\subset A_n$. 设$g=\sum\limits_n g_n$. 由于$\{B_n\}_{n\in\mathscr{N}}$覆盖$X$，因此$g(x)>0(x\in X)$. 从而函数$f_n=g_n/g$有定义且在$X$上连续，它们构成$X$上附属于$\{A_n\}_{n\in\mathscr{N}}$的单位分解.

证毕

下面的推论是有关单位分解的基本命题.

**推论 1** 设$K$为距离空间$X$中的紧子集，$\{A_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$是$K$的有限开覆盖，则存在$m$个连续映射$f_i: X\to[0,\ 1]$，使得$\mathrm{supp}(f_i)\subset A_i(1\leqslant i\leqslant m)$且$\sum\limits_{i=1}^m f_i(x)\leqslant1(x\in X)$并当$x\in K$时，$\sum\limits_{i=1}^m f_i(x)=1$.

**证明** 令$A_0=X\backslash K$，取附属于$X$的开覆盖$\{A_i\}_{0\leqslant i\leqslant m}$的连续单位分解$\{f_i\}_{0\leqslant i\leqslant m}$即可.

证毕

# 参考文献


[1] 田方增，非线性泛函分析国外近况简述，应用数学与计算数学，5(1979),60—86.

[2] 关肇直,泛函分析讲义(1958),高等教育出版社.

[3] 关肇直、张恭庆、冯德兴、线性泛函分析入门(1979)，上海科学技术出版社.

[4] 江泽坚、吴智泉,实变函数论(1978),人民教育出版社.

[5] 夏道行、严绍宗、吴卓人、舒五昌，实变函数论与泛函分析，上下册(1979),人民教育出版社.

[6] 郑维行、王声望,实变函数与泛函分析概要,第一、二册(1980)，人民教育出版社.

[7] 陈文塬,非线性泛函分析(1982),甘肃人民出版社.

[8] 吴从炘、王廷辅，奥尔里奇空间及其应用(1983)，黑龙江科学技术出版社.

[9] 郭大钧,非线性泛函分析(1985),山东科学技术出版社.

[10] 张恭庆,临界点理论及其应用(1986),上海科学技术出版社.

[11] Jean-Pierre, Aubin, Applied functional analysis(1979), John Wiley & Sons, Inc..

[12] M. S. Berger, Nonlinear and functional analysis(1977), Academic Press.

[13] H. Brézis, Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Math. Studies, 5(1973), North Holland.

[14] F. E. Browder, Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution, Proc. Symp. pure Math., AMS, Vol. 18(1976).

[15] J. Cronin, Fixed points and topological degree in nonlinear analysis(1964), AMS, Providence.

[16] K. Deimling, Nonlinear functional analysis (1985) Springer-Verlag.

[17] J. Dugundji, A. Granas, Fixed point theory(1982), PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa.

[18] I. Ekeland, Nonconvex minimization problems(1979), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 1, N. 3, 443-473.

[19] H. Jeggle, Nichtlineare Funktionalanalysis(1979). B. G. Teubner Stuttgart.

[20] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problems aux limites nonlinéaires(1969), Dunod Gauthier-Villars.

[21] N. G. Lloyd, Degree theory(1978), Cambridge University Press.

[22] L. Nirenberg, Topics in nonlinear functional analysis (1974), Courant Institute.

[23] D. Pascali, S. Sburlan, Nonlinear mappings of monotone type (1978), Editura Academici Bucuresti România.

[24] J. T. Schwartz, Nonlinear functional analysis(1969), Courant Institute.

[25] A. E. Taylor, D. C. Lay, Introduction to functional analysis (1980), John Wiley & Sons, Inc..

[26] N. M. Temme, Nonlinear analysis, Vol. 1, 2(1976), Amsterdam.

[27] M. M. Vainberg, Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations (1974), John Wiley & Sons. Inc..

[28] K. Yosida, Functional analysis(1978), Springer-Verlag.

[29] E. Zeidler, Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis; II, Monotone operatoren(1977), Teubner-Texte Zur Math.

[30] E. Zeidler, Nonlinear funcional analysis and its applications; I. Fixed point theorems(1984); III. Variational methods and optimization(1985), Springer-Verlag.

[31] М. М. Вайнберг, Вариационные Методы исследования Нелинейных операторов, (1956), М. Физматгиз.

[32] Р. И. Качуровский, Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах (1968), УМН, 23:2, 121-168.

[33] М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений (1956), М. физматгиз.

[34] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Геометрические методы нелинейного анализа (1975), Наука.

# 索　引

## 一划、二划、三划


1-内点　11

1-开集　11

二阶常微分方程两点边值问题　45

广义导数　273

广义解　**275**

广义 Dirichlet 型　**275**

上方图　**259**


## 四　划


水平集　73

支集　90

开半空间　73

开覆盖　84

无条件局部极值　195

不等式

　　Debrunner-Flor～　244

不动点定理

　　集值映射的 Banach～　285

　　Altman～　164

　　Borsuk定理　133

　　Borsuk-Ulam定理　135

　　Brouwer～　126

　　Browder 集值映射～　286, 287

　　Bohnenblust-Karlin～　289

　　Caristi～　52

　　Krasnoselskii～　163

　　Rothe～　162

　　Schauder～　159

不动点性质　160

公式

　　关于泛函的广义 Lagrange～　14

　　用 F-微分表达的 Taylor～　34

　　用 G-微分表达的 Taylor～　182

引理

　　变分学基本～　196

　　Urysohn～　294

方程

　　非线性发展～　63

　　非线性 Hammerstein 型积分～　173

　　拟线性椭圆型偏微分～的变动边值问题　276

方法

　　Ritz～　217

## 五　划

半空间　73
半距离
　Pompeiu-Hausdorff～　285
正则点　90
正则值　90
正的对称核　214
正则泛函　223
凸泛函　203
凸性模数　87
凸规划问题　280
本征向量　139
本征值　139

## 六　划

有效域　222
有限交性质　84
闭半空间　73
连通分支　97
同伦　97
　$C^1$～　109
　紧～类　152
收缩核　169
仿射无关　259
仿紧的　167
次梯度　223
次微分　223
导算子
　Gâteux～　15
　Fréchet～　17
导映射
　G～　16
　F～　17

## 七　划

连续　1
　一致～　2
　半～　8
　次～　8
　下半～　51
　弱～　8
　弱下半～　191
　强～　8
　～可微　17
泛函
　拟凸～　290
　Minkowski～　74
序列式弱闭集　9
序列式弱闭包　81
局部一致凸模数　229
局部半有界　282
局部有界　226
局部有限　167
极小化序列　215
孤立解　119
邻域
　～公理　79
　～基　80

## 八　划


函数
　抽象～　25
　抽象～的 Riemann 积分　26
　指示～　200
　承托～　74
　磨光～　106
　Caratheodory～　4
　Stekloff～　109
图形　222
空间
　严格凸～　55
　严格赋范～　56
　局部一致凸～　229
　一致凸～　57
　紧拓扑～　84
　Sobolev～　272
单位分解　293
势泛函　181
　梯度映射的～表达式　187
　Caratheodory映射的～表达式　188
定理
　反函数～　36
　同胚～　104
　奇映射～　155
　开映射～　158
　抽象函数微积分的基本～　29
　凸集第一分离～　76
　凸集第二分离～　77
　隐函数～　39
　算子分解～　209
　Asplund～　230
　Dugundji 扩张～　167
　Eberlein-Shmulyan～　10
　Kakutani～　162
　Kronecker 存在～　114
　Kachurovskii～　204
　Minty-Browder～　253
　Neumann-Fan 极小极大～　291
　Pettis～　9
　Poincaré-Bohl～　116
　Sard～　99
　Stone～　167
　Tietze-Urysohn 扩张～　128
　Trojanski～　230
拓扑度
　$C^1$ 映射的～　93
　连续映射的～　111
　Brouwer～　111
　Leray-Schauder～　150
拓扑度的性质
　切除～　118,155
　可解～　114,151
　同伦不变～　117,152
　边界值～　116,153
　区域可加～　118,155
　连通支～　115,155

标准～ 114,151
锐角原理 161
简化定理 124
乘积定理 121,155
Poincaré-Bohl 定理 116

## 九 划

临界点 90
临界值 90
保核收缩 163
映射
广义伪单调～ 284
半单调～ 284
正则～ 151
正规对偶～ 231
次紧～ 68
闭～ 151
伪单调～ 238
有界～ 1
极大单调～ 236
非扩展～ 49
严格非扩展～ 49
单调～ 225
梯度～ 181
循环单调～ 283
Caratheodory～ 4
原理
Leray-Schauder～ 165
恒等式
Hadamard～ 100
指数
～公式 120
Poincaré～ 120

## 十 划

弱拓扑 81
弱邻域 81
弱开集 81
弱闭集 81
弱闭包 81
弱紧集 85
弱*拓扑 83
弱*开集 83
弱*闭集 83
弱*闭包 83
接触点 80
值域 222
紧向量场 145
紧拓扑空间 84
紧集 84

## 十一划、十二划、十三划

梯度 16
强制 200,243

超平面 73

　　闭～ 264

最优点 280

最优解 280

微分

　　沿某一方向(左、右)～ 11

　　高阶～ 32

　　Gâteaux～ 16

　　Fréchet～ 17

满射 243


## 十　四　划


算子 23

　　正～ 30

　　有界的 $n$ 线性～

　　有限秩～ 145

　　全连续～ 145

　　严格单调～ 206

　　单调～ 206, 225

　　强单调～ 206

　　紧～ 145

　　$n$ 线性～ 30

　　非扩展～ 49

　　压缩～ 49

　　次紧～ 68

　　Hammerstein 积分～ 22

　　Nemyskii～ 4

　　Urysohn 积分～ 146

　　Lipschitz～ 49

# 符　　号

$2^M$

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$

$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$

$\mathrm{dom}\varphi$

$\partial\varphi(x)$

$\delta T(x)h$

$\delta_+T(x)h$

$\delta_-T(x)h$

$\overline{\Omega}$

$\overline{\Omega}_w$

$\overline{\Omega}_{w,s}$

$\partial\Omega$

$\Omega^\pm$

$K^\circ$

$\rho(x,y)$

$a(u,v)$

$B(x_0,r)$

$\bar{B}(x_0,r)$

$\mathscr{B}(X,Y)$

$\mathscr{B}(X)$

$\mathscr{B}(X_1,\cdots,X_n;Y)$

$\mathscr{B}_n(X,Y)$

$C(\overline{\Omega})$

$C^1(\overline{\Omega})$

$C^2(\overline{\Omega})$

$C_0^r(\overline{\Omega})$

$C_0^\infty(\Omega)$

$C[a,b]$

$\mathrm{co}(M)$

$\overline{\mathrm{co}}(M)$

$C^1(X,R^m)$

$C_0^1(X,R^m)$

$C(I,X)$

$dT(x)h$

$d^nT(x)(h_1,\cdots,h_n)$

$d^nT$

$DT(x)h$

$D^nT(x)(h_1,\cdots,h_n)$

$D^nT$

$\mathscr{D}(T)$

$\deg(f,\Omega,p)$

$\rho(a,B)$

$\mathrm{eg}\varphi$

$e_r(\varphi)$

$E^n$

$\bar{E}^1$

$E_+^1$

$\mathrm{fix}(T)$

$f^{-1}(\boldsymbol{p})$

$\|f\|$

$\|f\|_1$

$f^{\leqslant}(c)$

$f^{<}(c)$

$f^{\geqslant}(c)$

$f^{>}(c)$

$\mathrm{grad}\varphi(\boldsymbol{x})$

$\mathscr{G}_z(T)$

$\boldsymbol{h}(A,B)$

$H^m(\Omega)$

$H_0^m(\Omega)$

$\mathrm{index}(f,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p})$

$I_C(x)$

$J$

$K(M)$

$l^2(Z)$

$L^{p,n}(\Omega)$

$\mathscr{N}$

$\mathscr{N}_0$

$R^n$

$R_\pm^n$

$\mathscr{R}(T)$

$\mathrm{Supp}(f)$

$\mathrm{Span}\{u_1,\cdots,u_n\}$

$\mathscr{U}(x)$

$X^*$

$A^*$

$(\cdot,\cdot)$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$

$\longrightarrow$

$\longrightarrow$